ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Τόμος 3ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
• Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Μέτης Στέφανος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Μπρουχούτας Κωνσταντίνος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Παπασταυρίδης Σταύρος
• Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ
Θωμαΐδης Ιωάννης
• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ
Ανδρεαδάκης Στυλιανός,
Κατσαργύρης Βασίλειος
Μέτης Στέφανος,
Μπρουχούτας Κων/νος
Πολύζος Γεώργιος

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ
Αδαμόπουλος Λεωνίδας
• Επίτιμος Σύμβουλος του Π.Ι.

Δακτυλογράφηση: Γαρδέρη Ρόζα
Σχήματα: Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Τόμος 3ος

Ανδρεαδάκης Στυλιανός

Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μέτης Στέφανος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μπρουχούτας Κων/νος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Παπασταυρίδης Σταύρος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

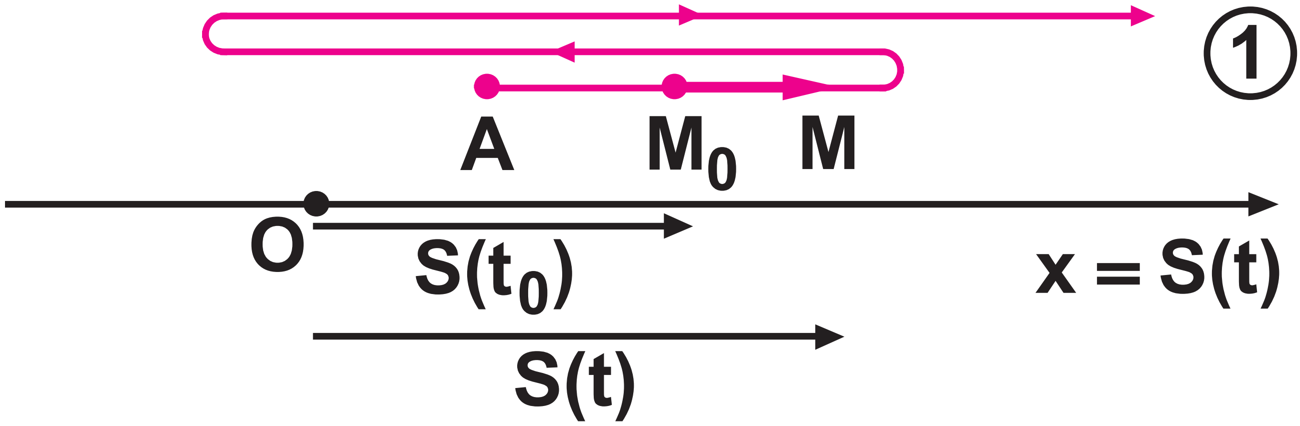
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Στιγμιαία ταχύτητα

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t.



Η συνάρτηση S καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t και ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.
Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι κάποια χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στη θέση M_0 και ότι μετά από παρέλευση χρόνου h, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_0 + h$, βρίσκεται στη θέση M. (Σχ. 1). Στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t η μετατόπιση του κινητού είναι ίση με $S(t) - S(t_0)$. Άρα, η **μέση ταχύτητα** του κινητού σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι

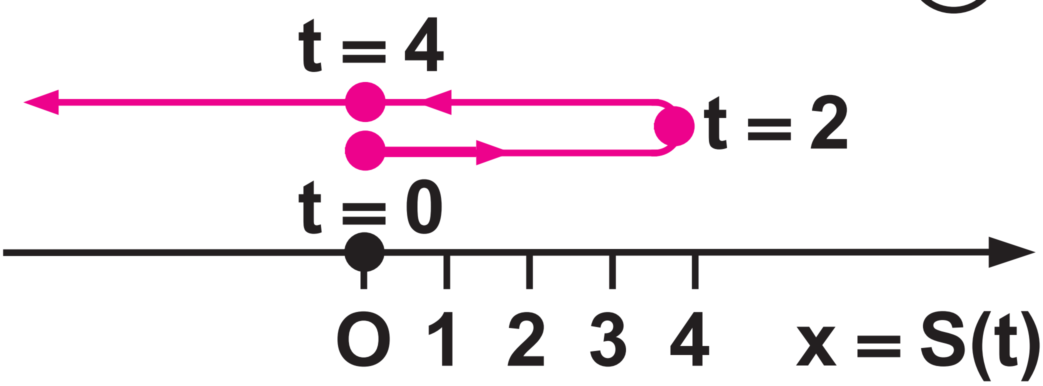
$$\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}=\frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}.$$

Όσο το t είναι πλησιέστερα στο t_0, τόσο η μέση ταχύτητα του κινητού δίνει με καλύτερη προσέγγιση το ρυθμό αλλαγής της θέσης του κινητού κοντά στο t_0. Για το λόγο αυτό το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0, το ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $υ(t_0)$. Δηλαδή:

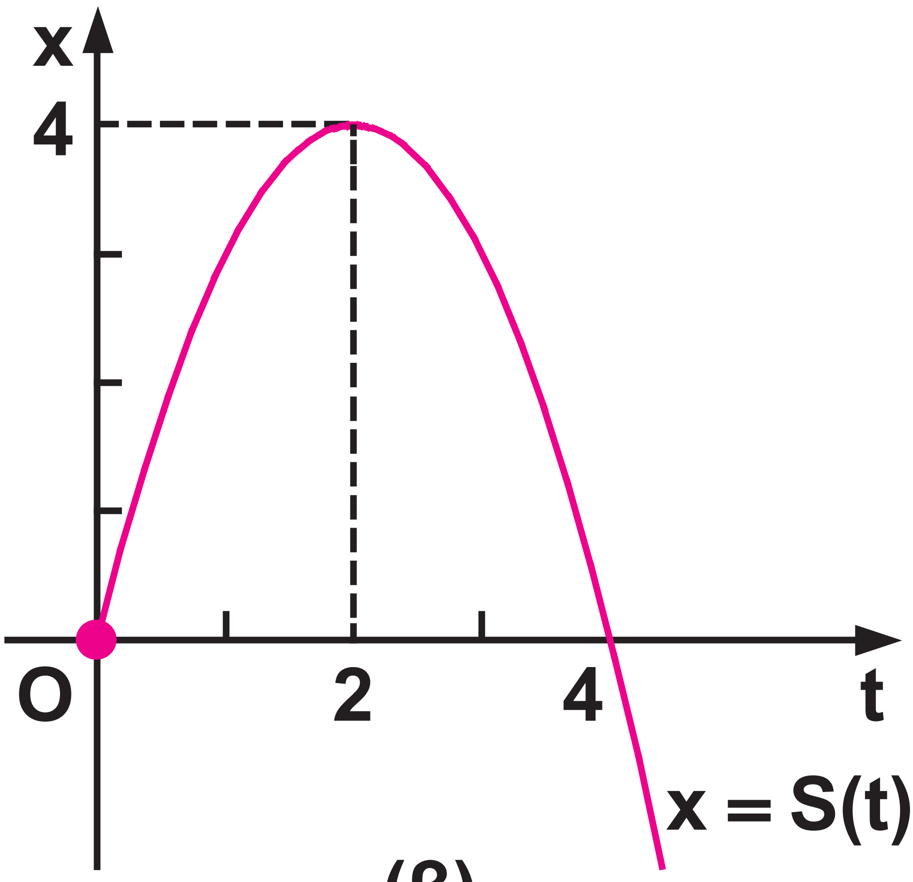
$$υ(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}.$$

Για παράδειγμα, αν $S(t) = -t^2 + 4t$ είναι η συνάρτηση θέσης ενός κινητού (Σχ.2β),

2



(α)



(β)

τότε η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ και $t_3 = 3$ είναι αντιστοίχως:

- $$\upsilon(1) = \lim_{t \to 1} \frac{S(t) - S(1)}{t - 1} =$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{-t^2 + 4t - 3}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{-(t-1)(t-3)}{t - 1} = 2$$

- $$\upsilon(2) = \lim_{t \to 2} \frac{S(t) - S(2)}{t - 2} =$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{-t^2 + 4t - 4}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{-(t-2)(t-2)}{t - 2} = 0$$

- $$\upsilon(3) = \lim_{t\to 3} \frac{S(t) - S(3)}{t-3} =$$

$$= \lim_{t\to 3} \frac{-t^2 + 4t - 3}{t-3} =$$

$$= \lim_{t\to 3} \frac{-(t-1)(t-3)}{t-3} = -2.$$

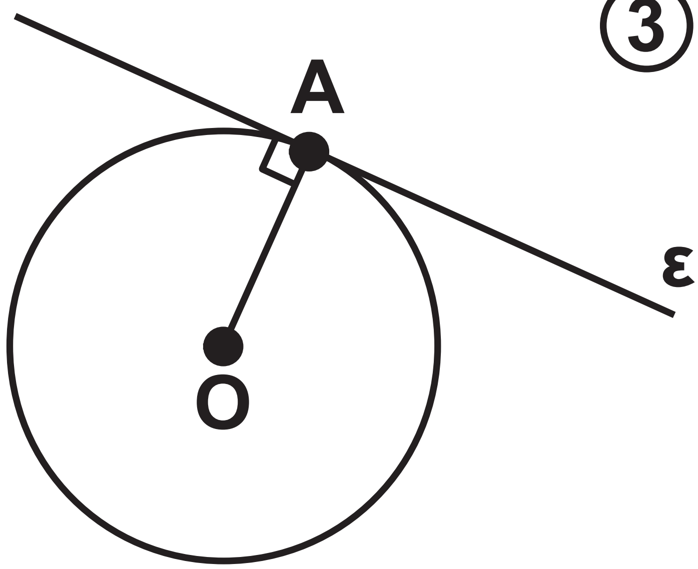
ΣΧΟΛΙΟ

Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0) \geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0) \leq 0$.

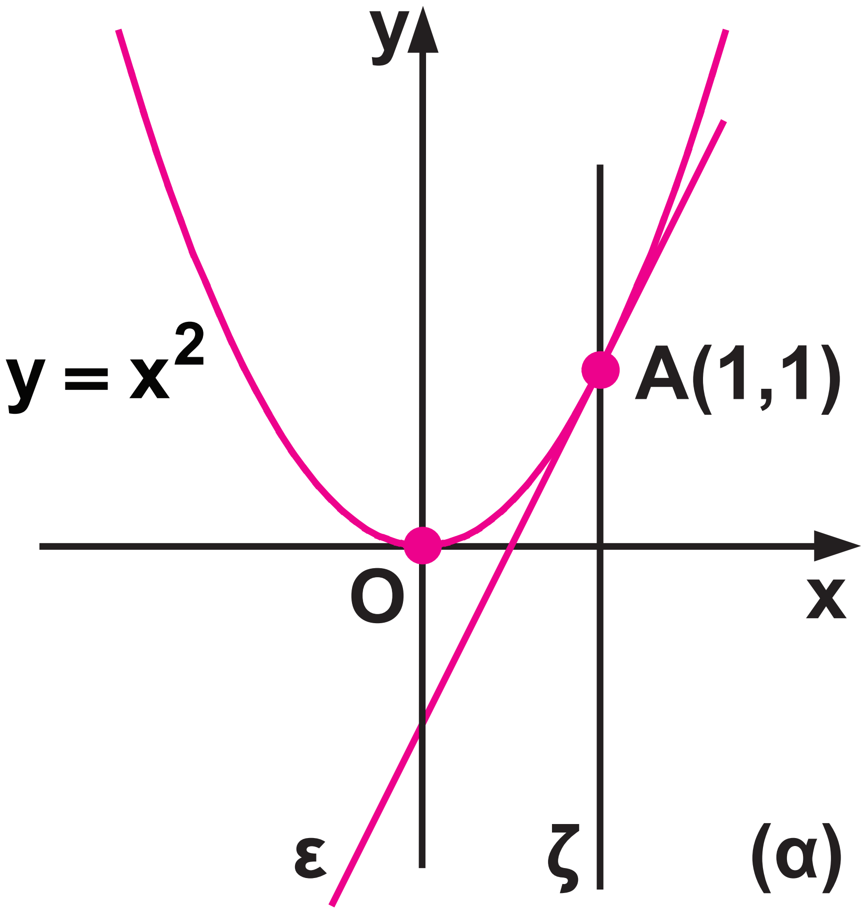
Πρόβλημα εφαπτομένης

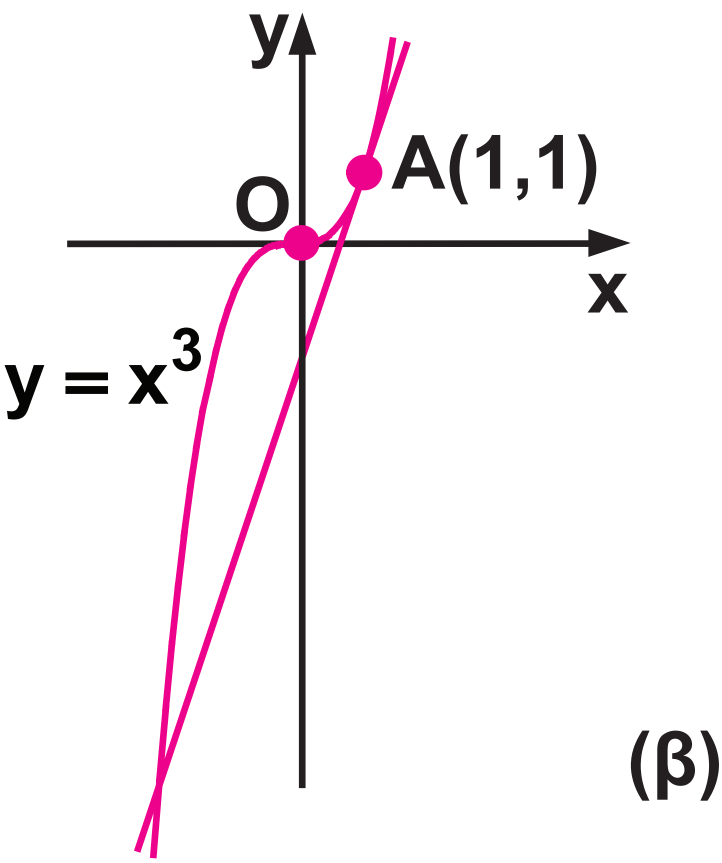
Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του Α ονομάζουμε την ευθεία η οποία έχει με τον κύκλο ένα μόνο κοινό σημείο, το Α. Ο ορισμός αυτός δεν μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη, γιατί, με έναν τέτοιο ορισμό η παραβολή $y=x^2$ θα είχε στο σημείο Α(1, 1) δύο εφαπτόμενες ε και ζ (Σχ. 4α), ενώ η $y=x^3$ δεν θα είχε στο σημείο Α(1,1) καμία εφαπτομένη (Σχ. 4β).

3



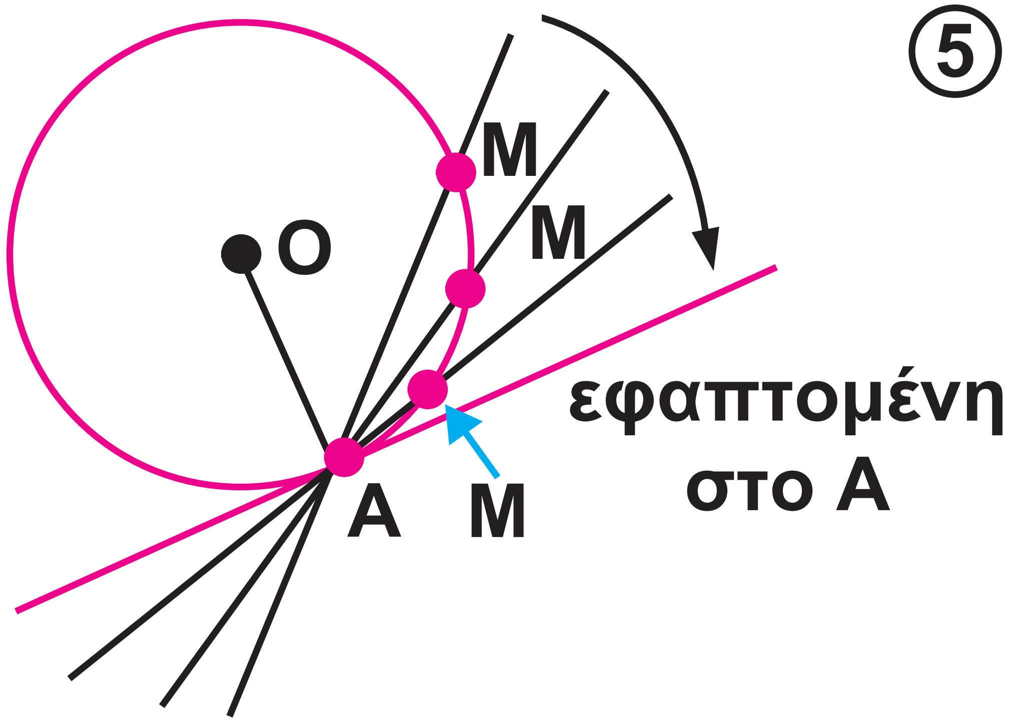
④





Επομένως, πρέπει να αναζητήσουμε έναν άλλον ορισμό της εφαπτομένης του κύκλου, ο οποίος να μπορεί να γενικευτεί για όλες τις καμπύλες.

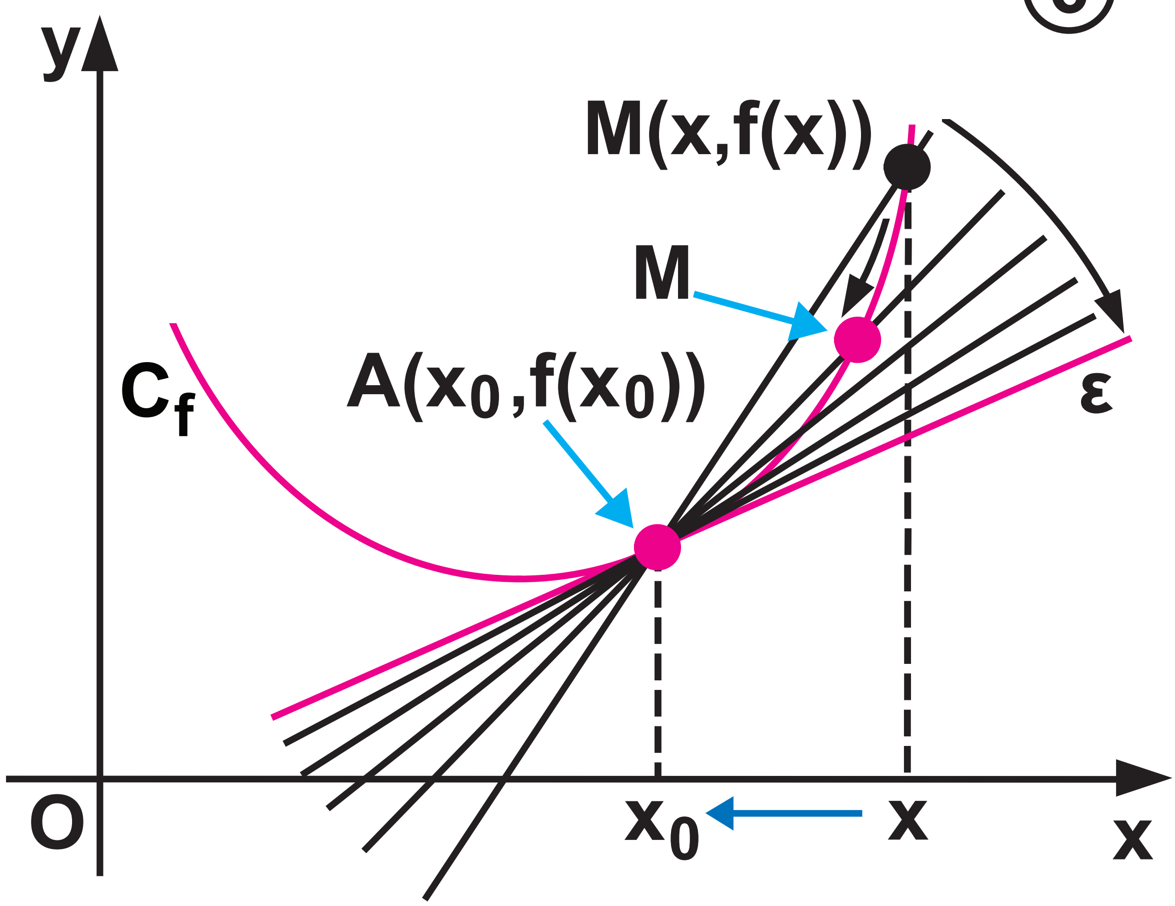
Θεωρούμε, λοιπόν, ένα άλλο σημείο Μ του κύκλου (Σχ. 5). Τα σημεία Α, Μ ορίζουν μια τέμνουσα του κύκλου, την ευθεία ΑΜ. Καθώς το σημείο Μ, κινούμενο πάνω στον κύκλο πλησιάζει στο Α, η τέμνουσα ΑΜ φαίνεται να έχει ως “οριακή θέση” την εφαπτομένη του κύκλου στο Α.



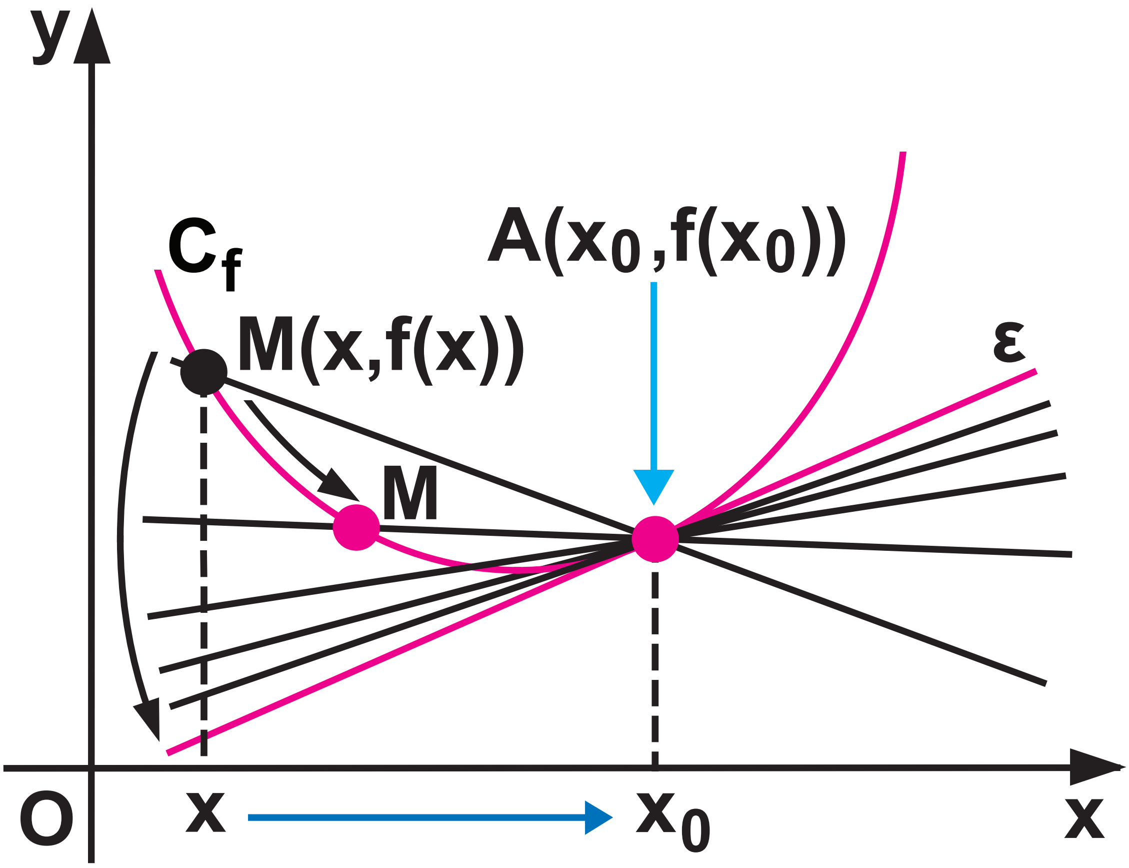
Τη διαπίστωση αυτή θα δούμε, τώρα, πως μπορούμε να την αξιοποιήσουμε για να ορίσουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της.

• Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.

⑥



(α)



(β)

Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο $M(x, f(x))$, $x \neq x_0$, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία AM που ορίζουν τα σημεία A και M, παρατηρούμε ότι:

Καθώς το x τείνει στο x_0 με $x > x_0$, η τέμνουσα AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε (Σχ. 6α). Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το x τείνει στο x_0 με $x < x_0$ (Σχ. 6β). Την οριακή θέση της ΑΜ θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α. Επειδή η κλίση της τέμνουσας ΑΜ είναι ίση με $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, είναι λογικό να αναμένουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα έχει κλίση το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Έτσι δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f.
Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0),$$

όπου

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

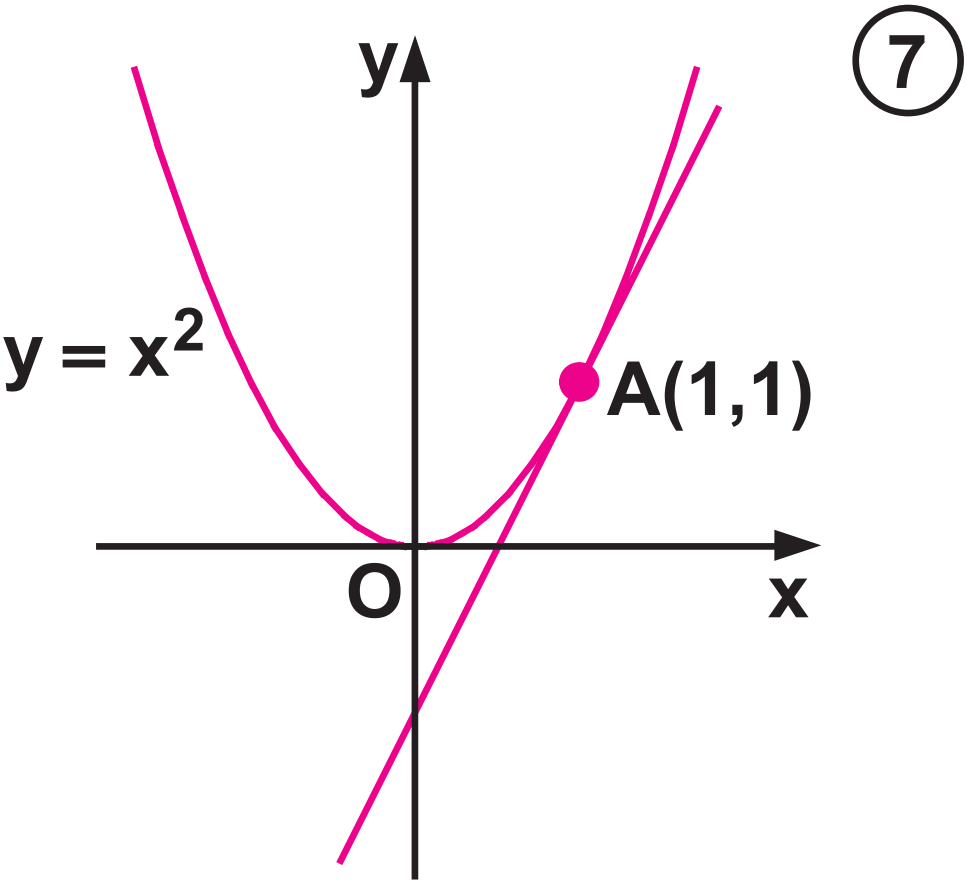
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$f(x)=x^2$ και το σημείο της $A(1,1)$.
Επειδή

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)=2,$$

ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,1)$. Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=2$ και εξίσωση $y-1=2(x-1)$.



Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

Στα προηγούμενα, οι ορισμοί της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού και της εφαπτομένης σε σημείο μιας καμπύλης μας οδήγησαν σε ένα όριο της μορφής

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Για την ιδιαίτερη περίπτωση που το παραπάνω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2 + 1$, τότε στο $x_0 = 1$ έχουμε

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

Επομένως, $f'(1) = 2$.

Αν, τώρα, στην ισότητα

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ θέσουμε

$x = x_0 + h$, τότε έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange. Είναι φανερό ότι, αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι ίσα.

Για παράδειγμα,

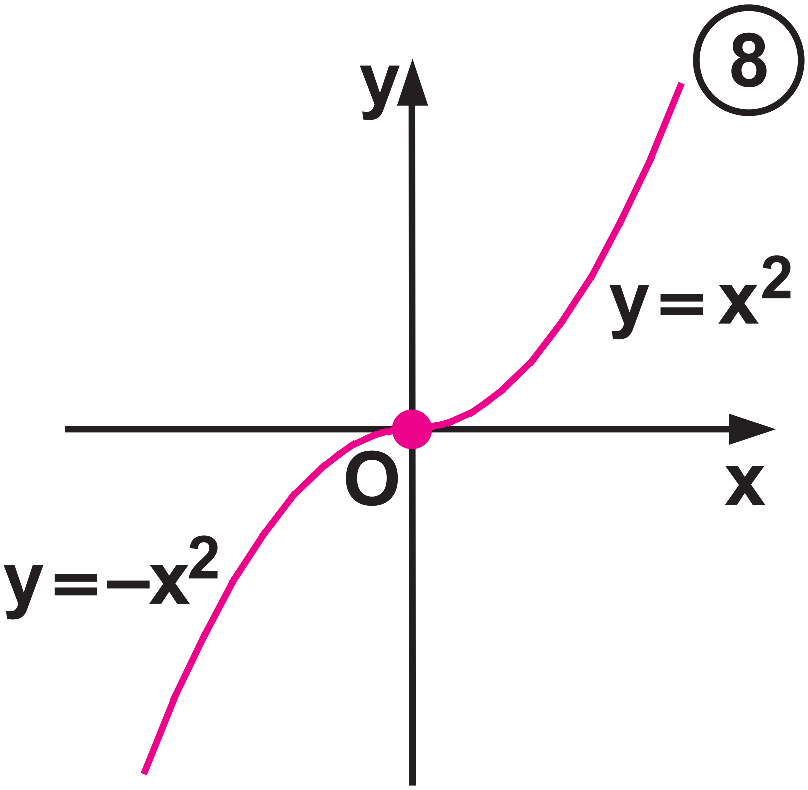
— η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x^2 & , \quad x<0\\ x^2 & , \quad x\geq 0\end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$, αφού

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-0}{x}=0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x}=0,$$



ενώ

— η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<0 \\ 5x & , \quad x\geq 0 \end{cases}$

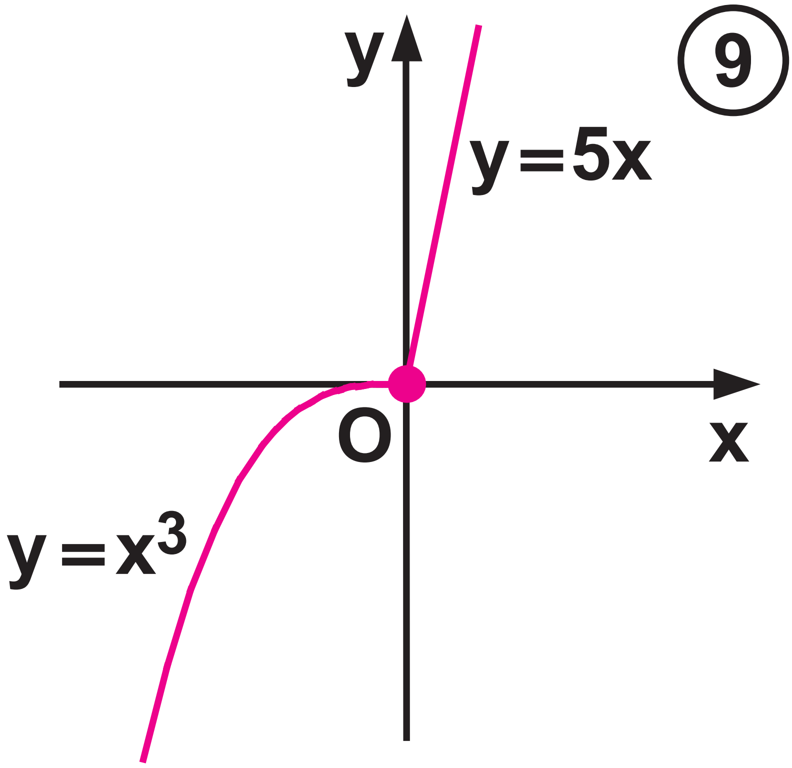
δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-0}{x}=0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x-0}{x}=5.$$

9



ΣΧΟΛΙΑ

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

- **Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης**

$x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι

$$υ(t_0) = S'(t_0).$$

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι

$$λ = f'(x_0),$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

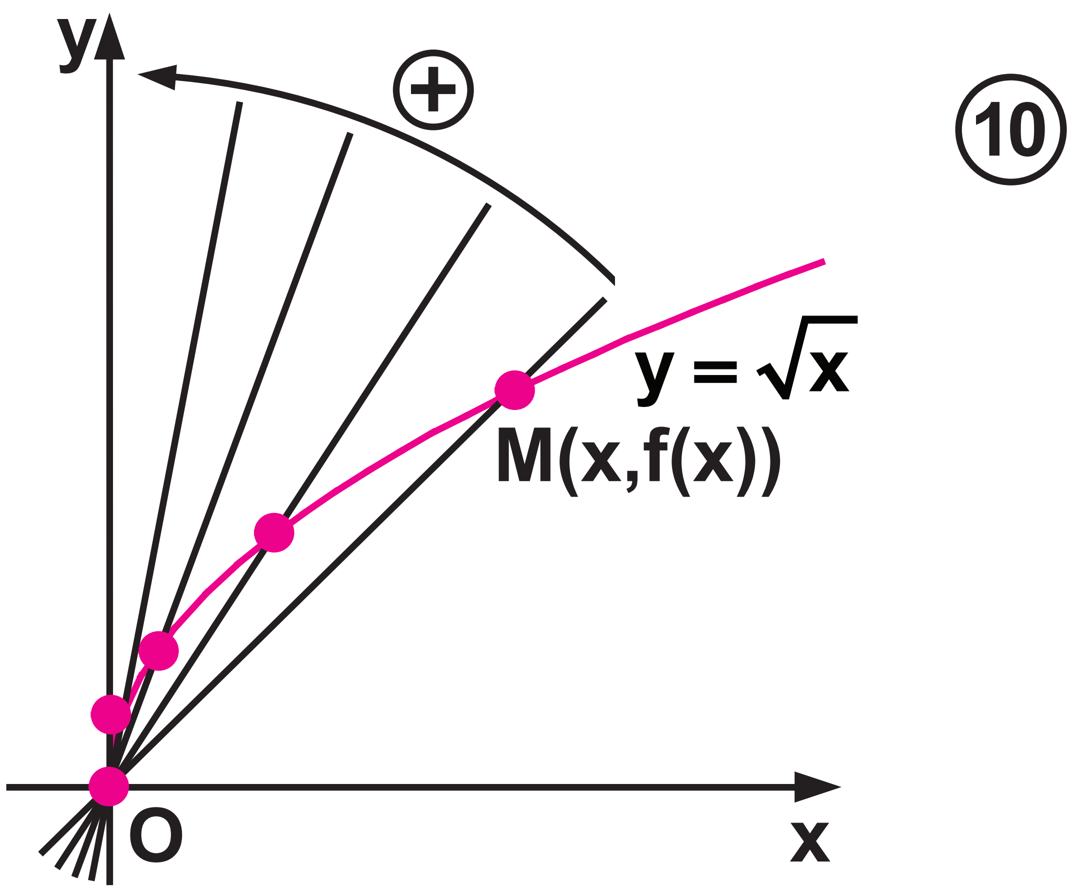
Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A ή κλίση της f στο x_0.**

Κατακόρυφη εφαπτομένη

● Ας δούμε, τώρα, αν μπορούμε να ορίσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνεχούς συνάρτησης f σ' ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, όταν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

— Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{x} \text{ (Σχ. 10).}$$



Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

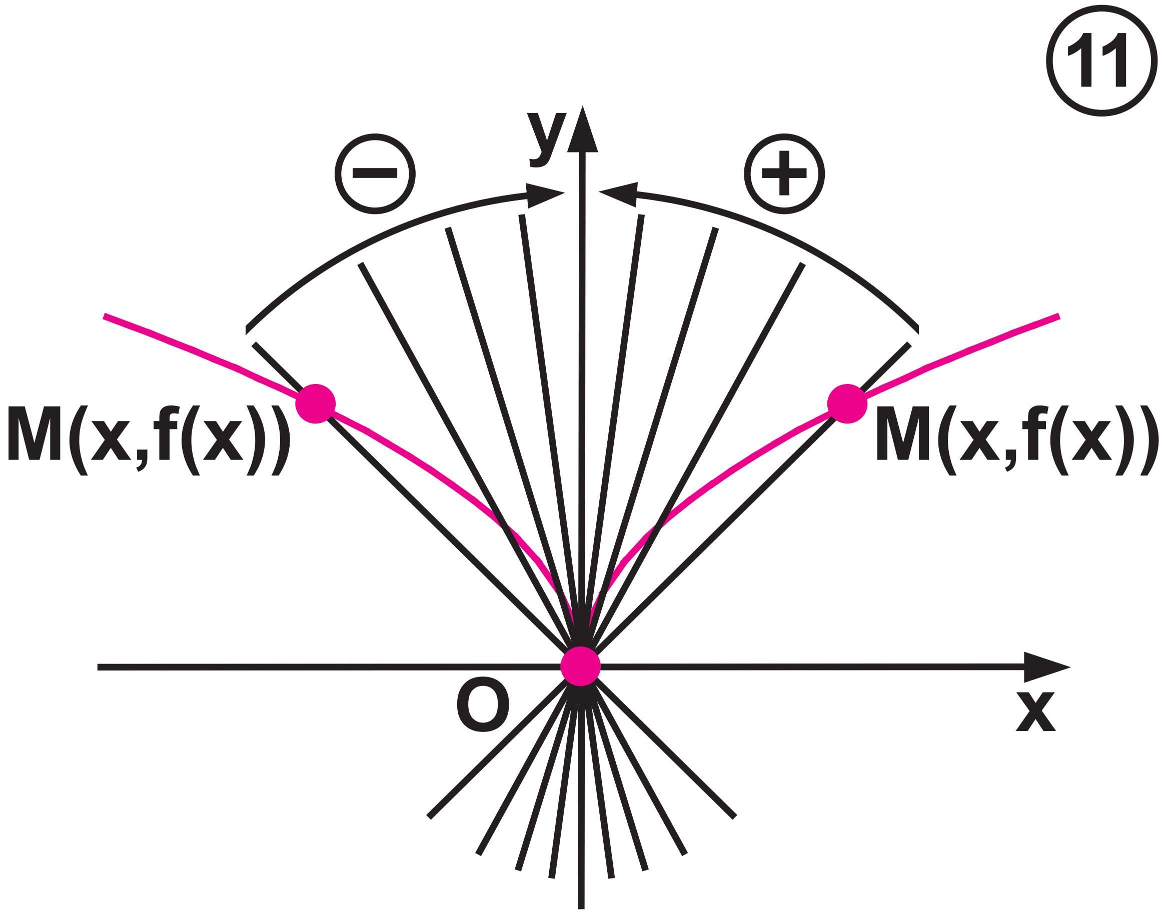
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

Παρατηρούμε όμως ότι, αν $M(x, f(x))$, $x\neq 0$, είναι ένα σημείο της C_f, τότε, καθώς το x τείνει στο 0, η τέμνουσα ΟΜ φαίνεται να παίρνει ως οριακή θέση την κατακόρυφη ευθεία που περνάει από το Ο, δηλαδή τείνει να συμπέσει με τον άξονα $y'y$. Στην περίπτωση αυτή ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $O(0,0)$ ορίζουμε την κατακόρυφη ευθεία $x=0$.

— Έστω τώρα και η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{|x|}. \quad (\Sigma\chi.\ 11)$$



Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x}=$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$$

και

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Παρατηρούμε όμως και εδώ ότι, αν $M(x, f(x))$, $x \neq 0$, είναι ένα σημείο της C_f, τότε, καθώς το x τείνει στο 0, η τέμνουσα ΟΜ τείνει να συμπέσει με τον άξονα $y'y$. Στην περίπτωση αυτή ως εφαπτομένη της C_f στο $O(0, 0)$ ορίζουμε την κατακόρυφη ευθεία $x = 0$.

Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο x_0 και ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ (ή $-\infty$)

β) $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ και

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$,

γ) $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ και

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$, τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$.

Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}\,, & x < 0 \\ \sqrt{x}\,, & x \geq 0 \end{cases} \qquad (\Sigma\chi.\ 12)$$

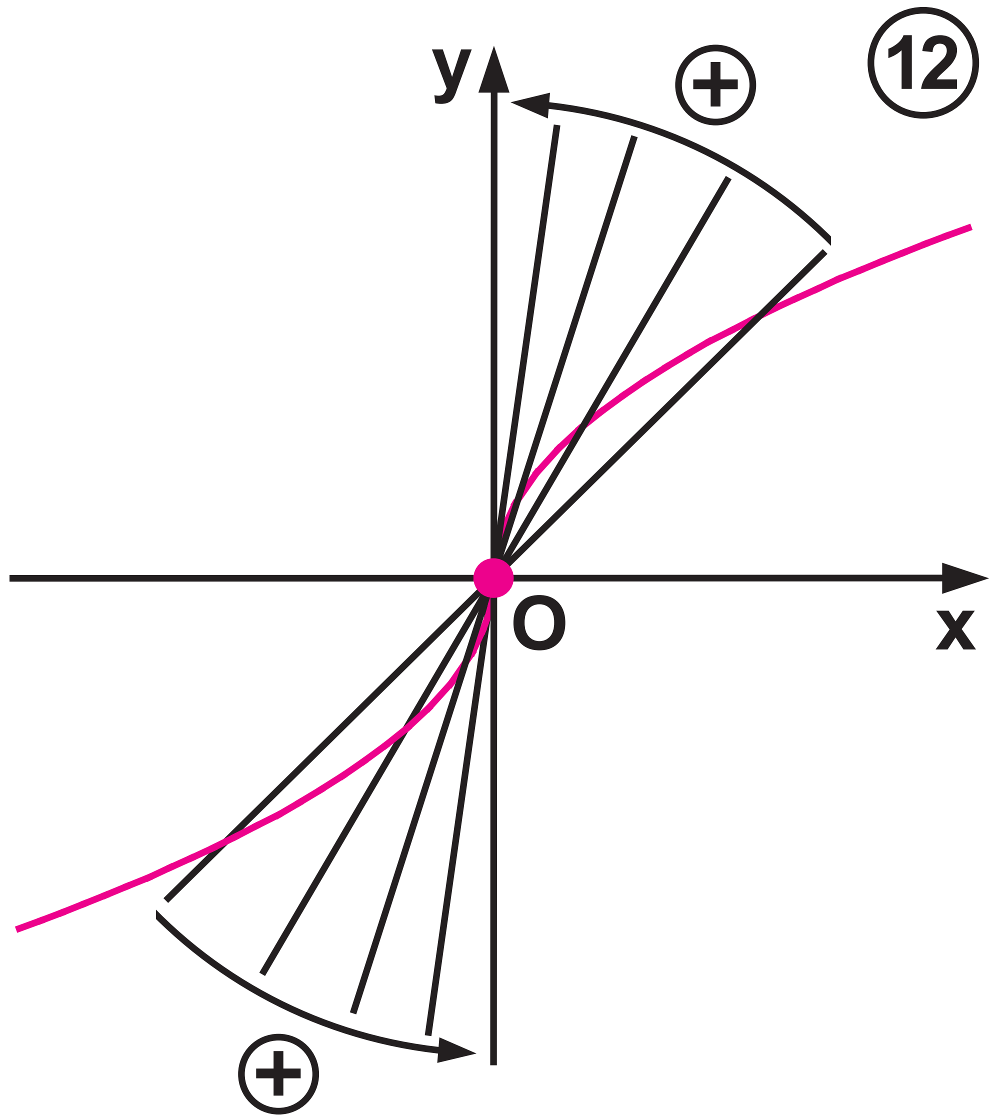
δέχεται στο σημείο της $O(0,0)$ κατακόρυφη εφαπτομένη, την $x = 0$, αφού είναι συνεχής στο 0 και ισχύει

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt{-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$



● Αν μια συνάρτηση f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και **δεν** ισχύουν οι προϋποθέσεις του παραπάνω ορισμού, τότε **δεν ορίζουμε** εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$. Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης

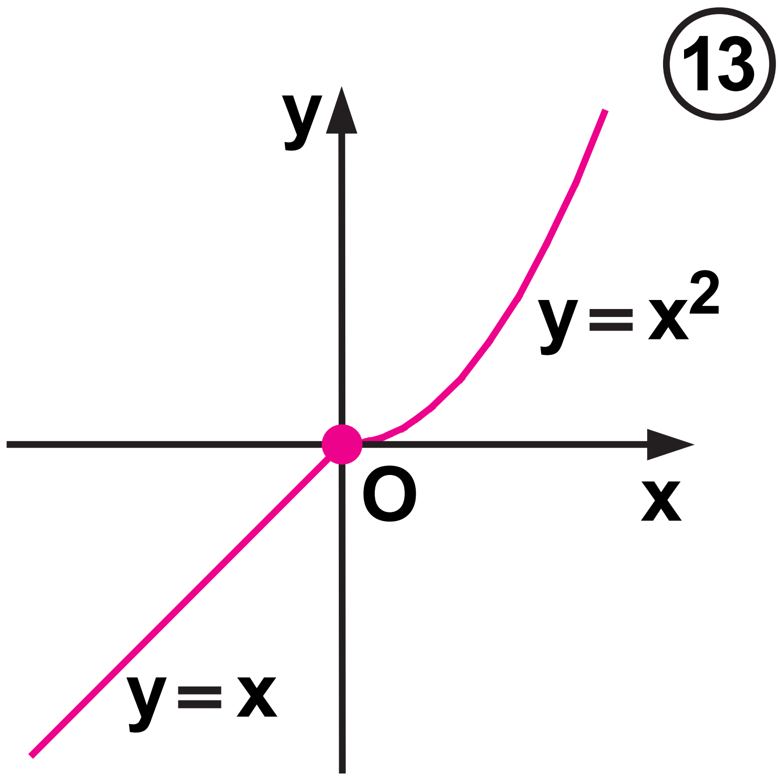
$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad x<0 \\ x^2 & , \quad x\geq 0 \end{cases},$$

δεν έχει εφαπτομένη στο O(0,0), αφού

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

ενώ

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0.$$



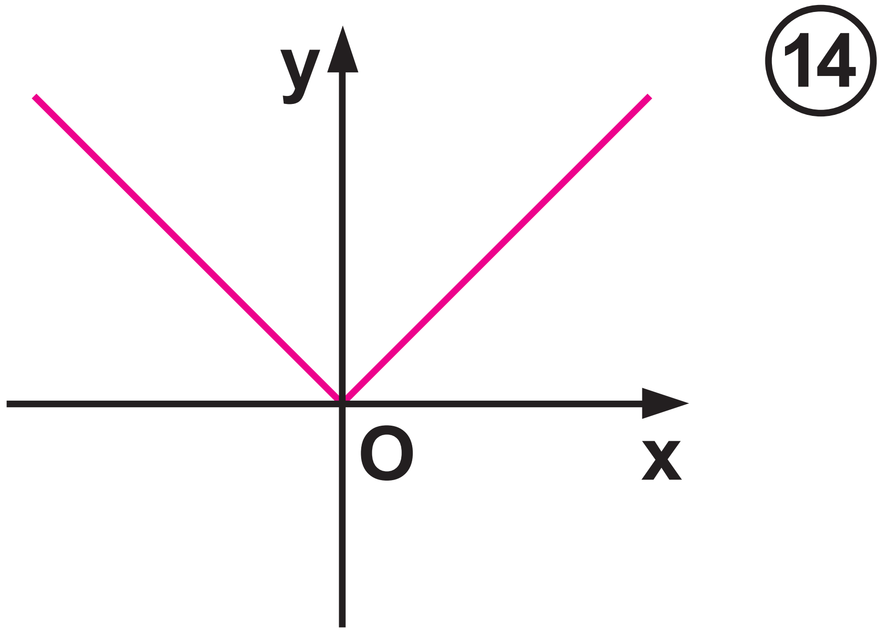
Παράγωγος και συνέχεια

Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1, \text{ ενώ}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1.$$



Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ’ ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ’ αυτό. Αν, όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε θα είναι και συνεχής στο x_0, δηλαδή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,

δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \alpha^2 & , \quad x < 0 \\ x^3 + \alpha x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$ **είναι:**

i) συνεχής στο $x_0 = 0$;

ii) παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$;

ΛΥΣΗ

i) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -1.$$

ii) Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

• Αν $\alpha \neq 1, -1$, η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής και επομένως δεν είναι παραγωγίσιμη.

• Αν $\alpha = 1$, η συνάρτηση γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , \quad x < 0 \\ x^3 + x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

— Για $x < 0$, έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2+x+1-1}{x}=\frac{x(x+1)}{x}=$$

$$=x+1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

— Για $x > 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3+x+1-1}{x}=\frac{x(x^2+1)}{x}=$$

$$=x^2+1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1.$$

Άρα

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

και επομένως, για $\alpha = 1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

• Αν $\alpha = -1$, η συνάρτηση γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , \quad x < 0 \\ x^3 - x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

— Για $x < 0$, έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2+x+1-1}{x} = \frac{x(x+1)}{x} =$$

$$= x+1,$$

οπότε

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0}(x+1) = 1.$$

— Για $x > 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3-x+1-1}{x}=\frac{x(x^2-1)}{x}=$$

$$=x^2-1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

και επομένως, για $\alpha=-1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν

   i) $f(x)=x^2+1,\ x_0=0$

   ii) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x_0=1$

   iii) $f(x)=ημ^2x,\ x_0=0.$

2. Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν

   i) $f(x)=x\,|\,x\,|,\quad x_0=0$

   ii) $f(x)=|\,x-1\,|,\quad x_0=1$

iii) $f(x) = |x^2 - 3x|, \quad x_0 = 1$

iv) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , \quad x < 0 \\ x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$,

$x_0 = 0$.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.

i) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 &, \quad x<0 \\ x^3 &, \quad x\geq 0 \end{cases}$,

αν $x_0=0$

ii) $f(x)=|x-1|+1$, αν $x_0=1$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f (αν ορίζεται) στο $A(x_0, f(x_0))$ για κάθε μία από τις συναρτήσεις των ασκήσεων 1 και 2.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=2-x+x\eta\mu|x|$ στο σημείο $x_0=0$.

2. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f(1+h) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(1) = 2$ ii) $f'(1) = 3$.

3. Αν $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & , \quad x < 0 \\ ημx + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$, να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο Α(0,1) και σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

4. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} &, \quad x\neq 0 \\ 0 &, \quad x=0 \end{cases}$$

στο $x_0 = 0$.

5. Αν $x+1 \leq f(x) \leq x^2+x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=1$

ii) $1 \geq \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \geq x+1$, για $x<0$

και

$1 \leq \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \leq x+1$, για $x>0$

iii) $f'(0)=1$.

6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$ημ^2x - x^4 \leq xf(x) \leq ημ^2x + x^4$$

να αποδείξετε ότι

i) $f(0) = 0$ ii) $f'(0) = 1$.

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 4$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 0$ ii) $f'(0) = 4$.

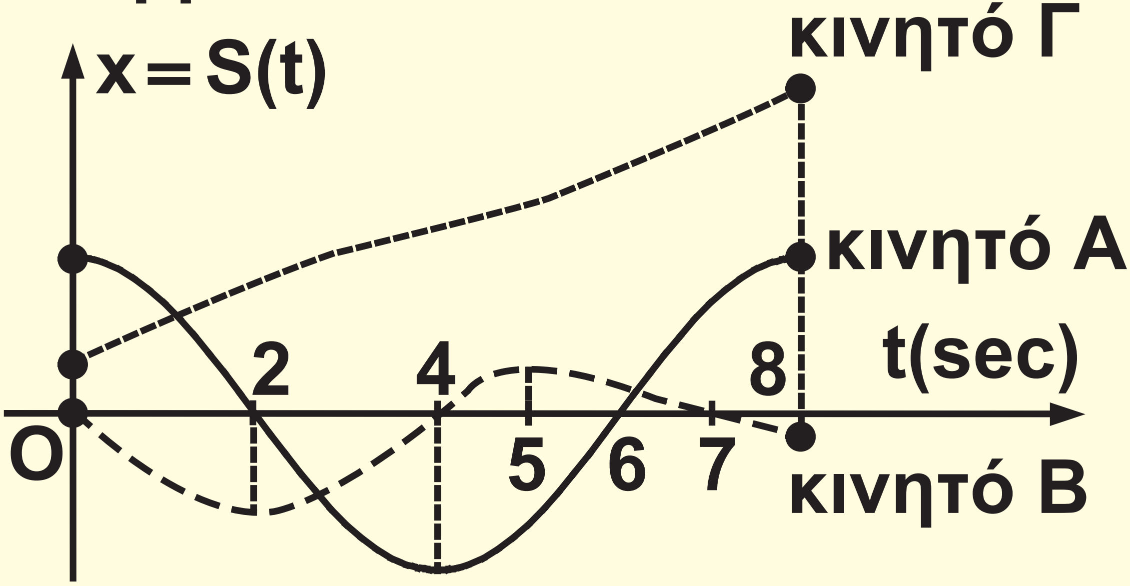
8. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-f'(x_0)$

ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$

$=2f'(x_0)$.

9. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 8 sec. Να βρείτε:



i) Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;

ii) Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;

iii) Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή t = 2 sec, ποιο τη χρονική στιγμή t = 4 sec και ποιο τη χρονική στιγμή t = 5 sec;

iv) Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0 sec έως 4 sec;

v) Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;

vi) Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

● Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Θα λέμε ότι:

— Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι

παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}.$$

● Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f' : A_1 \to R$$
$$x \to f'(x),$$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f. Η πρώτη παράγωγος της f

συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”. Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f''.
Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος** της f, με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$f^{(\nu)} = [\, f^{(\nu-1)}]', \ \nu \geq 3.$$

Η εύρεση της παραγώγου συνάρτησης, με βάση τον ορισμό που δώσαμε, δεν είναι πάντα εύκολη.

Στη συνέχεια θα δούμε μερικές βασικές περιπτώσεις παραγώγισης συναρτήσεων, που θα τις χρησιμοποιούμε στην εύρεση παραγώγου συναρτήσεων (αντί να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά).

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

● **Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή**

$$\boxed{(c)' = 0}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή $(c)' = 0$. ■

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή $(x)' = 1$. ■

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0} =$$

$$= \frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0} =$$

$$= x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \cdots + x_0^{\nu-1}) =$$

$$= x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \cdots + x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$. ■

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} =$$

$$= \frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. ■

• Έστω συνάρτηση $f(x) = ημx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = συνx$, δηλαδή

$$\boxed{(ημx)' = συνx}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{ημ(x+h) - ημx}{h} =$$

$$= \frac{ημx \cdot συνh + συνx \cdot ημh - ημx}{h} =$$

$$= ημx \cdot \frac{(συνh - 1)}{h} + συνx \cdot \frac{ημh}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h \to 0} \frac{ημh}{h} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{h \to 0} \frac{συνh - 1}{h} = 0,$$

έχουμε

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = ημx \cdot 0 + συνx \cdot 1 =$$

$$= συνx.$$

Δηλαδή, $(ημx)' = συνx$. ■

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = συνx$.
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = -ημx$, δηλαδή

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu x \cdot \eta\mu h - \sigma\upsilon\nu x}{h} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} - \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h}\right) -$$

$$- \lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}\right) = \sigma\upsilon\nu x \cdot 0 - \eta\mu x \cdot 1 =$$

$$= -\eta\mu x.$$

Δηλαδή, $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\,\eta\mu x$. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0,$$

τα οποία χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι η παράγωγος στο $x_0 = 0$ των συναρτήσεων f, g αντιστοίχως, αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-\eta\mu 0}{x-0}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 0}{x-0}=$$

$$=g'(0).$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=e^x$, δηλαδή

$$\boxed{(e^x)'=e^x}$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$, δηλαδή

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

Επειδή $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f σε ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

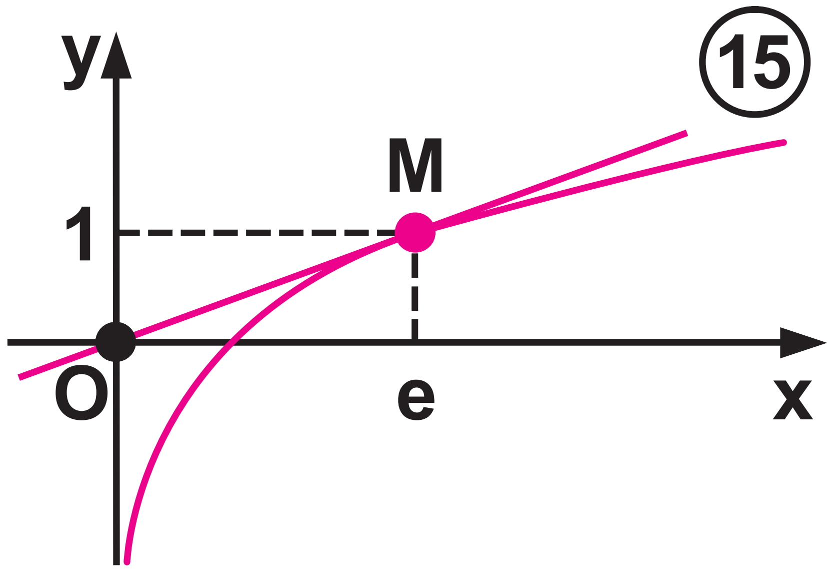
$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0).$$

Η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων O(0, 0), αν και μόνο αν

$$0-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(0-x_0)\Leftrightarrow \ln x_0=1\Leftrightarrow$$

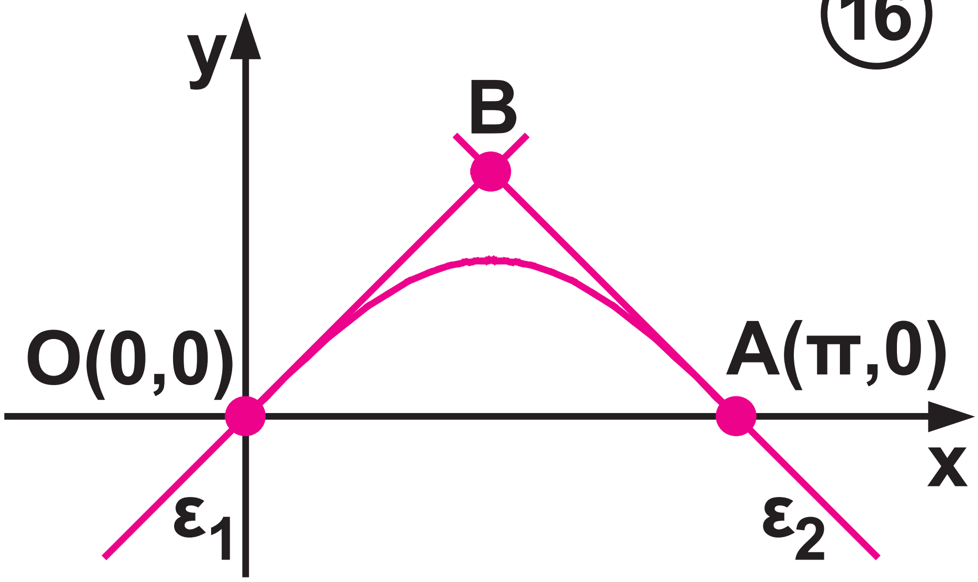
$$\Leftrightarrow x_0=e.$$

Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το M(e,1).



2. **Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ημx$ στα σημεία $O(0,0)$ και $A(π,0)$ αντιστοίχως.**
Να βρεθούν:

16



i) Οι εξισώσεις των $ε_1$ και $ε_2$

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι $ε_1$, $ε_2$ και ο άξονας των x.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$, είναι $f'(0) = 1$ και $f'(\pi) = -1$ οπότε οι ε_1, ε_2 έχουν εξισώσεις

$$y = x \qquad \text{και} \qquad y = -(x - \pi)$$

αντιστοίχως.

ii) Αν λύσουμε το σύστημα των παραπάνω δύο εξισώσεων βρίσκουμε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται στο σημείο $B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα, το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδόν $E = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

   i) $f(x) = x^4, \; x_0 = -1$

   ii) $f(x) = \sqrt{x}, \; x_0 = 9$

   iii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \; x_0 = \frac{\pi}{6}$

   iv) $f(x) = \ln x, \; x_0 = e$

   v) $f(x) = e^x, \; x_0 = \ln 2.$

2. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

   i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 1 \\ \sqrt{x} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases} \etaμx & , \quad x<0 \\ x & , \quad x\geq 0 \end{cases}$

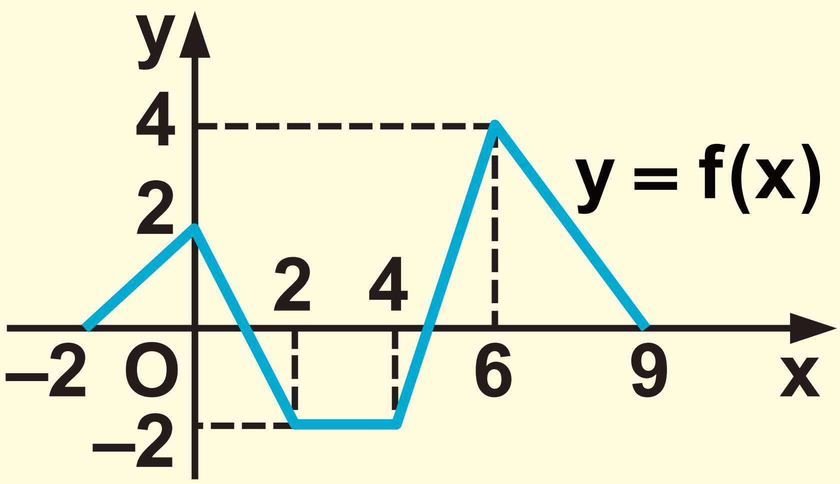
iii) $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x<2 \\ x^4 & , \quad x\geq 2 \end{cases}$

iv) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\leq \dfrac{2}{3} \\ x^3 & , \quad x>\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

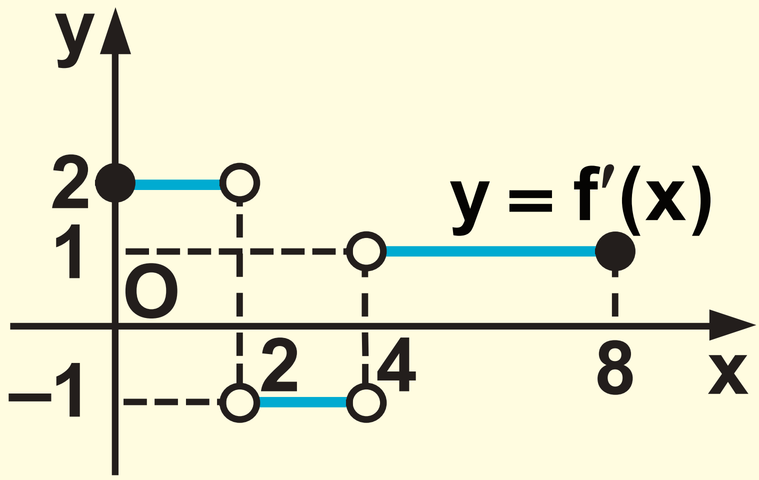
3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής $y=x^2$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη

γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$;

4. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του παρακάτω σχήματος.



5. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f:[0,8] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, με $f(0) = 0$, και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα.



Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x &, \quad x<\pi\\ \alpha x+\beta &, \quad x\geq\pi\end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\pi$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $A(\xi, f(\xi))$, $\xi\neq 0$ της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία

$A(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ εφάπτεται της C_f στο A.

3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha, \alpha^3)$, $\alpha \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο N εκτός του M. Στο σημείο N η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο M.

4. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi, \dfrac{1}{\xi}\right)$. Αν A, B είναι τα

σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες x′x και y′y αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι

i) Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi \in \mathbb{R}^*$.

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος αθροίσματος

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0). \qquad \blacksquare$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, \ldots, f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_k'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$(\eta\mu x + x^2 + e^x + 3)' = (\eta\mu x)' + (x^2)' + (e^x)' + (3)' = \sigma\upsilon\nu x + 2x + e^x.$$

Παράγωγος γινομένου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} g(x) +$$

$$+ f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

δηλαδή

$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. ■

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$(e^x \ln x)' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' =$$

$$= e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}, \; x > 0.$$

Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$(f(x)g(x)h(x))' = [(f(x)g(x))\cdot h(x)]' =$$

$$= (f(x)g(x))'\cdot h(x) + (f(x)g(x))\cdot h'(x) =$$

$$= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) =$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) +$$

$$+ f(x)g(x)h'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$(\sqrt{x}\cdot ημx \cdot \ln x)' = (\sqrt{x})'\cdot ημx \cdot \ln x +$$

$$+ \sqrt{x}\cdot (ημx)'\cdot \ln x + \sqrt{x}\cdot ημx \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} ημx \cdot \ln x + \sqrt{x}\cdot συνx \cdot \ln x +$$

$$+ \sqrt{x}\cdot ημx \cdot \frac{1}{x} \quad x > 0.$$

Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ’ ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, επειδή

$(c)' = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε:

$$\boxed{(cf(x))' = cf'(x)}$$

Για παράδειγμα,

$$(6x^3)' = 6(x^3)' = 6 \cdot 3x^2 = 18x^2.$$

Παράγωγος πηλίκου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Η απόδειξη παραλείπεται.
Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Για παράδειγμα,

$$\left(\frac{x^2}{5x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(5x-1) - x^2(5x-1)'}{(5x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x(5x-1) - x^2 \cdot 5}{(5x-1)^2} = \frac{10x^2 - 2x - 5x^2}{(5x-1)^2} =$$

$$= \frac{5x^2 - 2x}{(5x-1)^2}, \; x \neq \frac{1}{5}.$$

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες προτάσεις μπορούμε τώρα να βρούμε τις παραγώγους μερικών ακόμη βασικών συναρτήσεων.

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}}$$

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=$$

$$=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}.\ \blacksquare$$

Για παράδειγμα,

$$(x^{-4})' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5},\ x \neq 0.$$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι
$(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu > 1$.
Επομένως, αν $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$, τότε

$$(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}.$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' =$$

$$= \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \blacksquare$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή

$$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{x\ln x}{x-1}\right)' =$$

$$= \frac{(x\ln x)'(x-1) - x\ln x(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x\ln x - \ln x + x - 1 - x\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)^2}$$

2. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x+1}$ και $g(x) = x^2 - x + 1$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο Α(0,1) και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(0) = g'(0)$.

Έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x+1}\right)' = \frac{(1)'(x+1) - 1(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2}$$

και

$$g'(x)=(x^2-x+1)'=2x-1,$$

οπότε

$$f'(0)=-1 \text{ και } g'(0)=-1.$$

Άρα

$$f'(0)=-1=g'(0).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α(0,1) είναι:

$$y-1=-1(x-0) \Leftrightarrow y=-x+1.$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Έστω ότι ζητάμε την παράγωγο της συνάρτησης $y=\eta\mu 2x$, η οποία είναι σύνθεση της $g(x)=2x$ και της $f(x)=\eta\mu x$. Επειδή $\eta\mu 2x=2\,\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$, έχουμε

$(\eta\mu 2x)' = (2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)' = 2(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x +$
$+ 2\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)' = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\eta\mu^2 x =$
$= 2(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x.$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της $y = \eta\mu 2x$ δεν είναι η συνάρτηση $y = \sigma\upsilon\nu 2x$, όπως ίσως θα περίμενε κανείς από τον τύπο $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$. Αυτό εξηγείται με το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο g(Δ), τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u'.$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο.
Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα.
Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι τα εξής:

- Η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (1)}$$

Πράγματι, αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

• Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha$, δηλαδή

$$\boxed{(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha}$$

---

(1) Αποδεικνύεται ότι, για $\alpha > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

Πράγματι, αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\ln\alpha.$$

• Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει

$$\boxed{(\ln|x|)'=\frac{1}{x}}$$

Πράγματι.

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

Ανακεφαλαιώνοντας, αν η συνάρτηση $u = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε έχουμε:

$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	$(\varepsilon\varphi u)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u} \cdot u'$
$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\sigma\varphi u)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 u} \cdot u'$
$(\eta\mu u)' = \sigma\upsilon\nu u \cdot u'$	$(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$
$(\sigma\upsilon\nu u)' = -\eta\mu u \cdot u'$	$(\alpha^{u})' = \alpha^{u} \ln\alpha \cdot u'$
$(\ln\lvert u\rvert)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$	

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i) $f(x) = (3x^2 + 5)^9$

ii) $g(x) = e^{-x^2+1}$

iii) $h(x) = \ln\sqrt{x^2 + 1}$.

ΛΥΣΗ

i) Αν θέσουμε $u = 3x^2 + 5$, τότε η συνάρτηση $y = f(x)$ γράφεται

$$y = u^9,$$

οπότε έχουμε

$$y' = (u^9)' = 9u^8 \cdot u' =$$
$$= 9(3x^2 + 5)^8 \cdot (3x^2 + 5)' =$$
$$= 9(3x^2 + 5)^8 \cdot 6x =$$

$$= 54x(3x^2 + 5)^8.$$

Ομοίως, έχουμε

ii) $g'(x) = (e^{-x^2+1})' =$

$$= e^{-x^2+1}(-x^2 + 1)' = e^{-x^2+1}(-2x) =$$

$$= -2xe^{-x^2+1}$$

(θέσαμε $u = -x^2 + 1$)

iii) $h'(x) = (\ln(\sqrt{x^2 + 1}))' =$

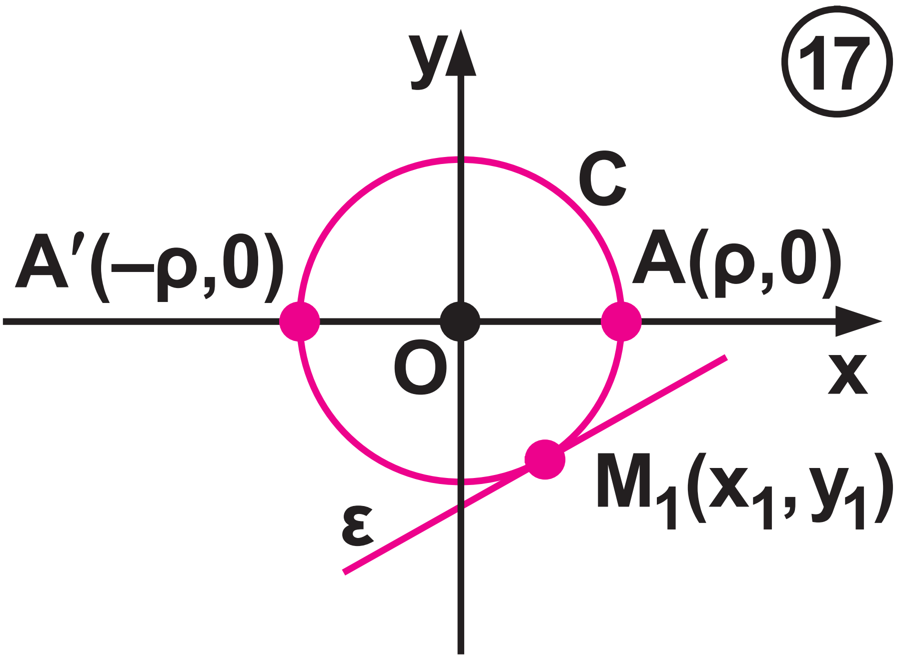
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (\sqrt{x^2 + 1})' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' =$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+1}.$$

(θέσαμε $u = \sqrt{x^2+1}$)

2. **Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $M_1(x_1, y_1)$.**



ΛΥΣΗ

Αν λύσουμε την εξίσωση του κύκλου ως προς y, βρίσκουμε ότι

$$y = \sqrt{\rho^2 - x^2}, \text{ αν } y \geq 0 \text{ και}$$

$$y = -\sqrt{\rho^2 - x^2}, \text{ αν } y \leq 0.$$

Επομένως, ο κύκλος C αποτελείται από τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f_1(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2} \quad \text{και} \quad f_2(x) = -\sqrt{\rho^2 - x^2}$$

οι οποίες είναι ορισμένες στο κλειστό διάστημα $[-\rho, \rho]$ και παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα $(-\rho, \rho)$.

Αν, τώρα, με $y = f(x)$ συμβολίσουμε εκείνη από τις παραπάνω συναρτήσεις στην οποία ανήκει το $M_1(x_1, y_1)$, τότε θα ισχύει

$\lambda_\varepsilon = f'(x_1)$ (1) και $x^2 + f^2(x) = \rho^2$ (2)

Έτσι, με παραγώγιση και των δύο μελών της (2), έχουμε

$$2x + 2\, f(x)\, f'(x) = 0$$

οπότε, για $x = x_1$, θα ισχύει

$$x_1 + f(x_1)\, f'(x_1) = 0.$$

Έτσι, λόγω της (1) θα έχουμε

$$x_1 + y_1 \cdot \lambda_\varepsilon = 0$$

οπότε, για $y_1 \neq 0$, θα είναι

$$\lambda_\varepsilon = \frac{-x_1}{y_1}.$$

Άρα, η εφαπτομένη ε έχει εξίσωση:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

η οποία γράφεται διαδοχικά:

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2, \qquad (3)$$

αφού $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$.

Αν $y_1 = 0$, που συμβαίνει όταν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι το $A(\rho,0)$ ή το $A'(-\rho,0)$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία αυτά είναι οι κατακόρυφες ευθείες

$$x = \rho \quad \text{και} \quad x = -\rho$$

αντιστοίχως. Και οι δυο αυτές εξισώσεις δίνονται από τον παραπάνω τύπο (3) για $(x_1, y_1) = (\rho, 0)$ και $(x_1, y_1) = (-\rho, 0)$ αντιστοίχως.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης οποιασδήποτε άλλης κωνικής τομής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

 i) $f(x) = x^7 - x^4 + 6x - 1$

 ii) $f(x) = 2x^3 + \ln x - \sqrt{3}$

iii) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x$

iv) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{3}\eta\mu x+\ln 3$.

2. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=(x^2-1)(x-3)$

ii) $f(x)=e^x\eta\mu x$

iii) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

iv) $f(x)=\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

v) $f(x)=x^2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$.

3. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{e^x}{\ln x}$

ii) $f(x)=\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x$

iii) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{e^x}$

iv) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}$.

4. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+3x & , \quad x<0 \\ 12\sqrt{x}+6x & , \quad x\geq 0 \end{cases}$

ii) $f(x)=\begin{cases} x^2+\eta\mu x & , \quad x\leq 0 \\ x & , \quad x>0 \end{cases}$

5. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα των x, όταν

i) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ ii) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

iii) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

6. Αν $f(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$ και

$g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, να βρείτε τις συναρτήσεις f', g'. Ισχύει $f'=g'$;

7. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2}$ στο κοινό σημείο τους Α(1,1), είναι κάθετες.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$.
Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η κλίση της C_f στο

σημείο της A(0,1) είναι ίση με $\frac{1}{2}$.

9. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x + 5$, στα οποία η εφαπτομένη είναι:
   i) παράλληλη προς την ευθεία $y = 9x + 1$
   ii) κάθετη προς την ευθεία $y = -x$.

10. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ η οποία άγεται από το σημείο A(0, – 1).

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = αx^2 + βx + γ$, $α, β, γ \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των $α, β, γ \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f, διέρχεται από το σημείο $Α(1,2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων.

12. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = (3x^4 + 4x^3)^{-2}$

ii) $f(x) = (x - 1)^{\frac{2}{3}}$

iii) $f(x) = ημ\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

iv) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-x\right)$

v) $f(x)=e^{-x^2}$.

13. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

i) $f(x)=x^2\sqrt{1+x^3}$, $x_0=2$

ii) $f(x)=(2x)^{\frac{1}{3}}+(2x)^{\frac{2}{3}}$, $x_0=4$

iii) $f(x)=x^3\eta\mu^3(\pi x)$, $x_0=\frac{1}{6}$

iv) $f(x)=\frac{x^2+2}{2-x}$, $x_0=3$.

14. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^{\ln x}$ ii) $f(x) = 2^{5x-3}$

iii) $f(x) = (\ln x)^x$, $x > 1$

iv) $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

15. Αν $f(x) = \eta\mu^2 x$, να αποδείξετε ότι $f''(x) + 4f(x) = 2$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \dfrac{1}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτομένες τους είναι κάθετες.

2. **Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x - 2$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ δύο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά.**

3. **Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.**

4. **Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = -x^2 - x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στην C_g.**

5. Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε $f(0)=4$, $f'(-1)=2$, $f''(2)=4$ και $f^{(3)}(1)=6$.

6. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο f δεύτερου βαθμού του οποίου η γραφική παράσταση να εφάπτεται των ευθειών $y=x+1$ και $y=3x-1$ στα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,2)$ αντιστοίχως.

7. Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\alpha$, να αποδείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)$

ii) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{e^x f(x) - e^\alpha f(\alpha)}{x - \alpha} =$

$= e^\alpha (f(\alpha) + f'(\alpha)).$

8. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \eta\mu 2x - 2\eta\mu^2 x,\ x \in [0, 2\pi],$$

στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα των x.

9. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο O(0,0) σε καθεμια περίπτωση χωριστά.

10. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(1) = 1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε οτι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

11. Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο διάστημα (-1,1), για την οποία ισχύει

$f(\eta\mu x) = e^x\ \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

i) Να βρείτε την $f'(0)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, ορίσαμε τη στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ως το όριο

$$\lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = S'(t_0).$$

Το όριο αυτό το λέμε και **ρυθμό μεταβολής** της τετμημένης S του κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Γενικά,

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση

παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Για παράδειγμα, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $υ'(t_0)$, της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $υ'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $α(t_0)$. Είναι δηλαδή

$$α(t_0) = υ'(t_0) = S''(t_0).$$

Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής K, η είσπραξη E και το κέρδος

P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο x_0**. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο x_0** και **οριακό κέρδος στο x_0**.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Ένα βότσαλο που ρίχνεται σε μία λίμνη προκαλεί κυκλικό κυματισμό. Μία συσκευή μέτρησης δείχνει ότι τη χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα r του κυματισμού είναι 50 cm, ο ρυθμός μεταβολής της r είναι 20 cm/sec. Να βρεθεί**

ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε που περικλείεται από το κυκλικό κύμα, τη χρονική στιγμή t_0.

ΛΥΣΗ

Επειδή $E = \pi \cdot r^2$ και η ακτίνα r είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε

$$E(t) = \pi r^2(t),$$

οπότε

$$E'(t) = 2\pi r(t) \cdot r'(t).$$

Επομένως,

$$E'(t_0) = 2\pi r(t_0) \cdot r'(t_0) = 2\pi \cdot 50 \cdot 20 =$$

$$= 2000\pi \ (cm^2/sec).$$

2. Αν το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x)$ και η συνολική είσπραξη από την πώλησή τους είναι $E(x)$, τότε $P(x) = E(x) - K(x)$ είναι το συνολικό κέρδος και $K_{\mu}(x) = \frac{K(x)}{x}$ είναι το μέσο κόστος.

i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης είναι ίσοι.

ii) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ίσο με το οριακό κόστος.

ΛΥΣΗ

i) Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι

$$P'(x) = E'(x) - K'(x).$$

Επομένως,

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E'(x) = K'(x).$$

ii) Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι

$$K'_\mu(x) = \frac{K'(x)\cdot x - K(x)}{x^2}.$$

Επομένως

$$K'_\mu(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x)\cdot x - K(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = K_{\mu}(x).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1sec$. (Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

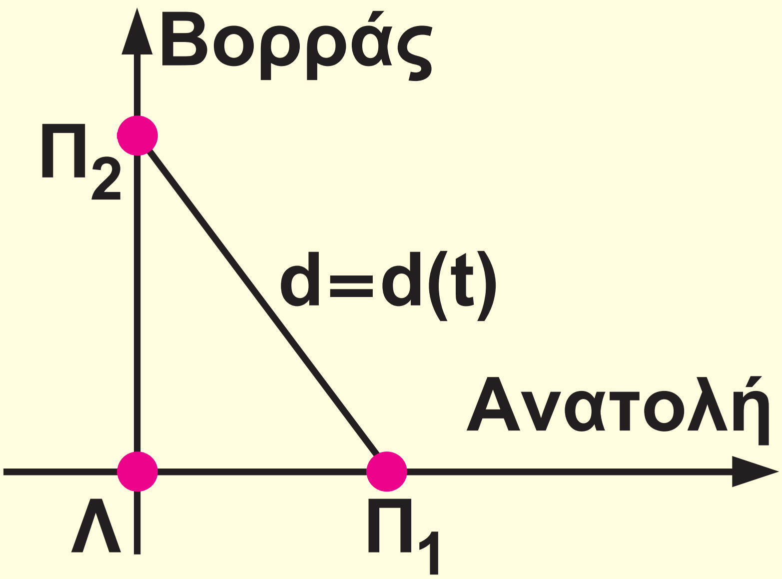
2. Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό 100 cm^3/sec. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με 9 cm;

3. Το κόστος παραγωγής, K(x), και η τιμή πώλησης, Π(x), x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$$

και $Π(x) = 420x$ αντιστοίχως. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους, $P(x) = Π(x) - K(x)$, είναι θετικός.

4. **Δύο πλοία $Π_1$ και $Π_2$ αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ. Το πλοίο $Π_1$ κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15 km/h και το $Π_2$ βόρεια με ταχύτητα 20 km/h.**



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των $Π_1$ και $Π_2$

ii) Να αποδείξετε ότι η από- σταση $d = (\Pi_1\Pi_2)$ των δυο πλοίων αυξάνεται με σταθε- ρό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

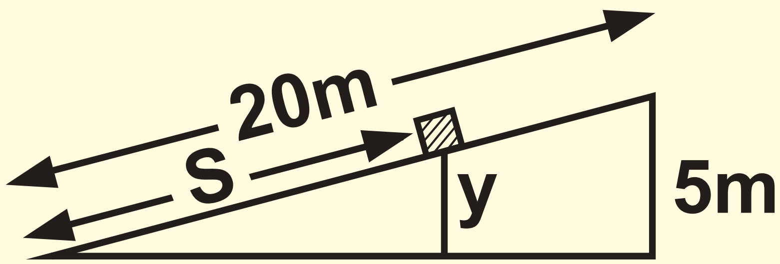
5. Ένα κινητό Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινεί- ται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2$, $x \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μετα- βολής της τετμημένης x του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβο- λής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

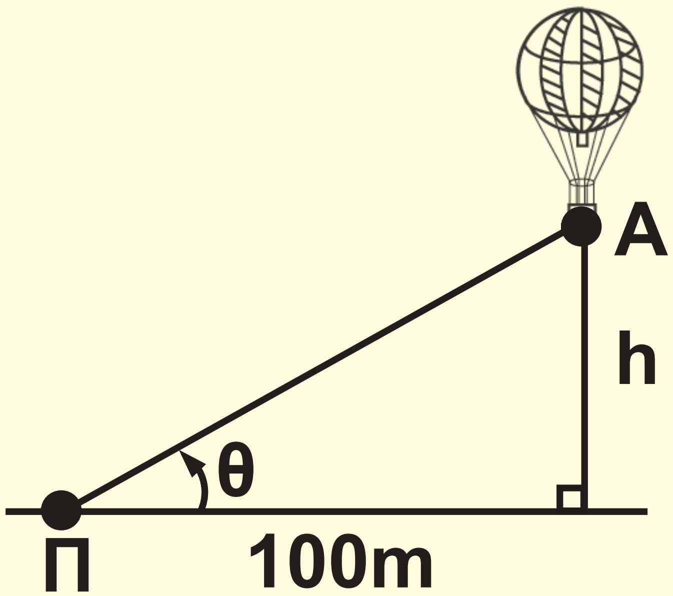
1. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10 cm^2/sec, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r = 85$ cm.

2. Έστω Τ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$, με $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Τ, όταν $x = 5$cm.

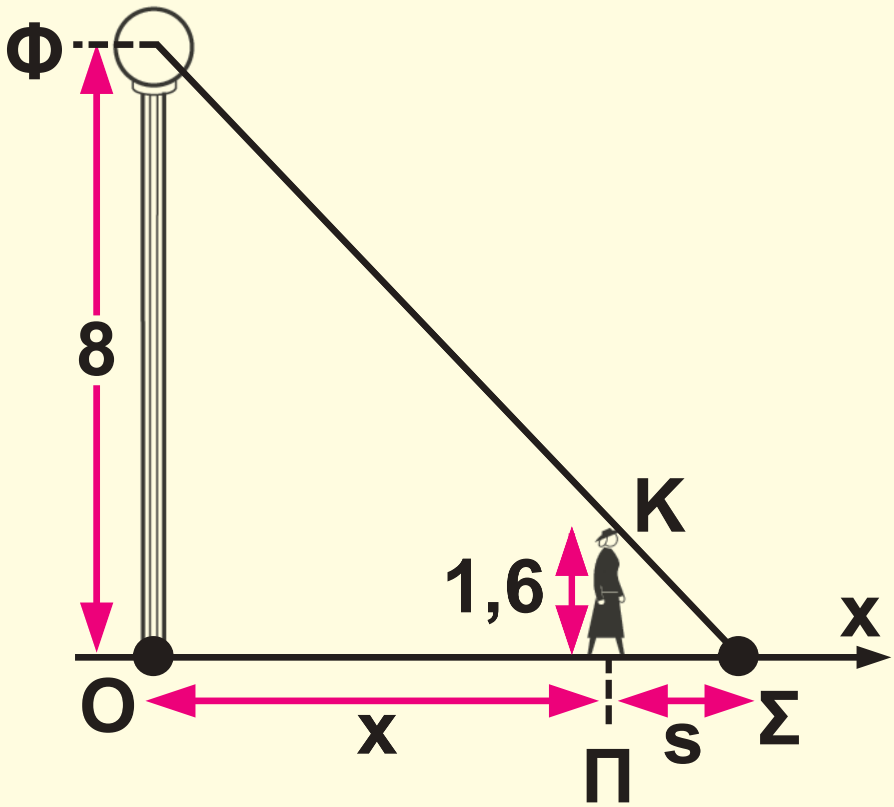
3. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του παρακάτω σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3 m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του y.



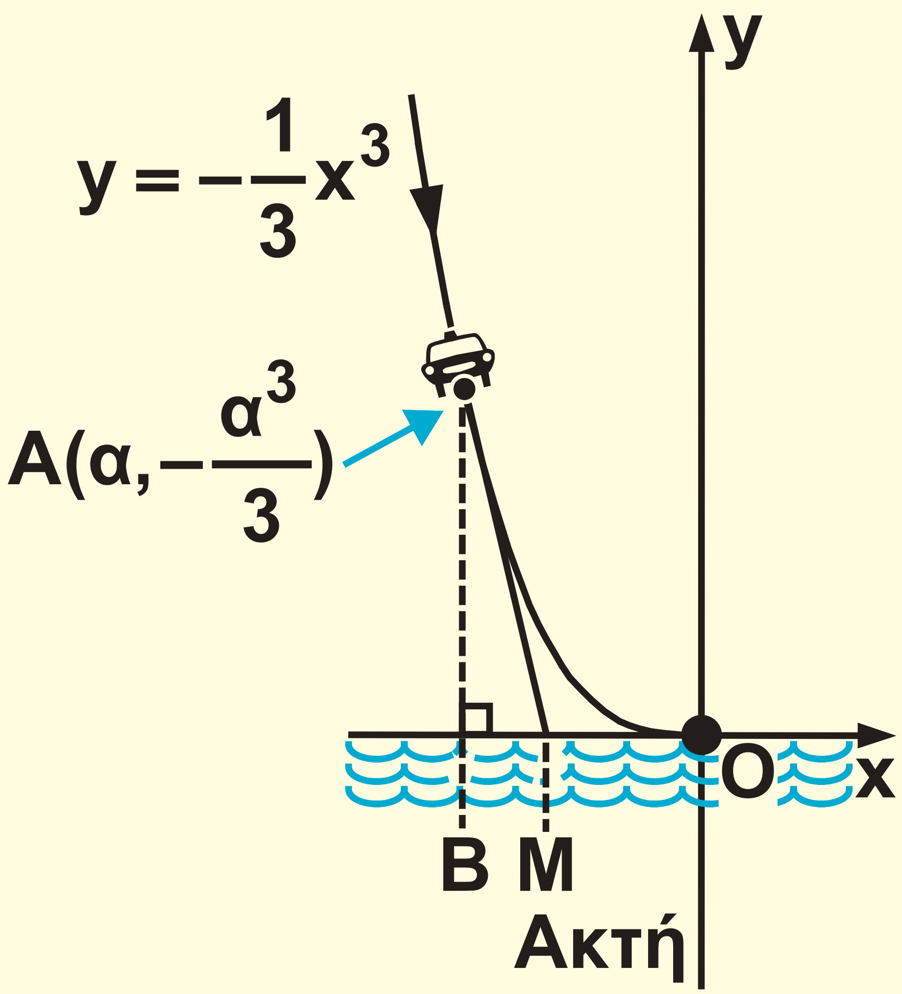
4. Ένα αερόστατο Α αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100 m από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50 m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλλόνι βρίσκεται σε ύψος 100 m.



5. Μία γυναίκα ύψους 1,60 m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8 m με ταχύτητα 0,8 m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;



6. Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα).



Αν ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\alpha(t)$$

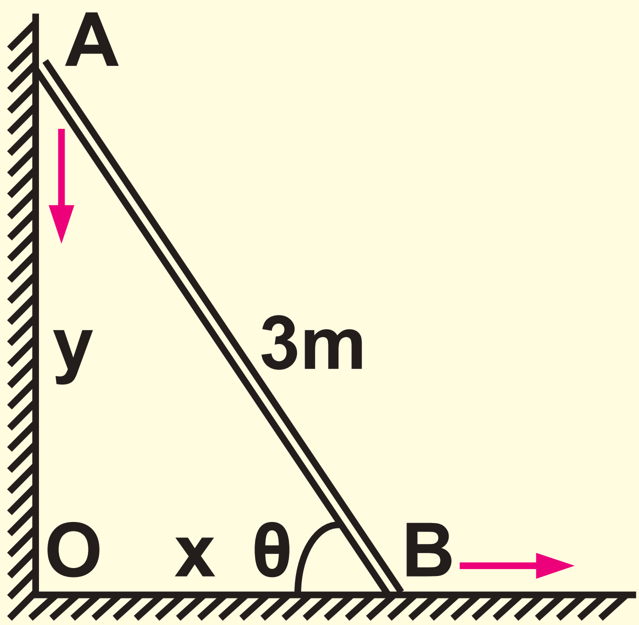
να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη –3.

7. Μία σκάλα μήκους 3 m είναι τοποθετημένη σ’ έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1 m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας

απέχει από το δάπεδο 2,5 m, να βρείτε:

i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).

ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας.



8. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A.

2.5 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε ένα από τα πλέον βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού που είναι γνωστό ως Θεώρημα Μέσης Τιμής. Αρχικά διατυπώνουμε το Θεώρημα του Rolle, το οποίο είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και στη συνέχεια διατυπώνουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής, το οποίο αποδεικνύεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Rolle.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

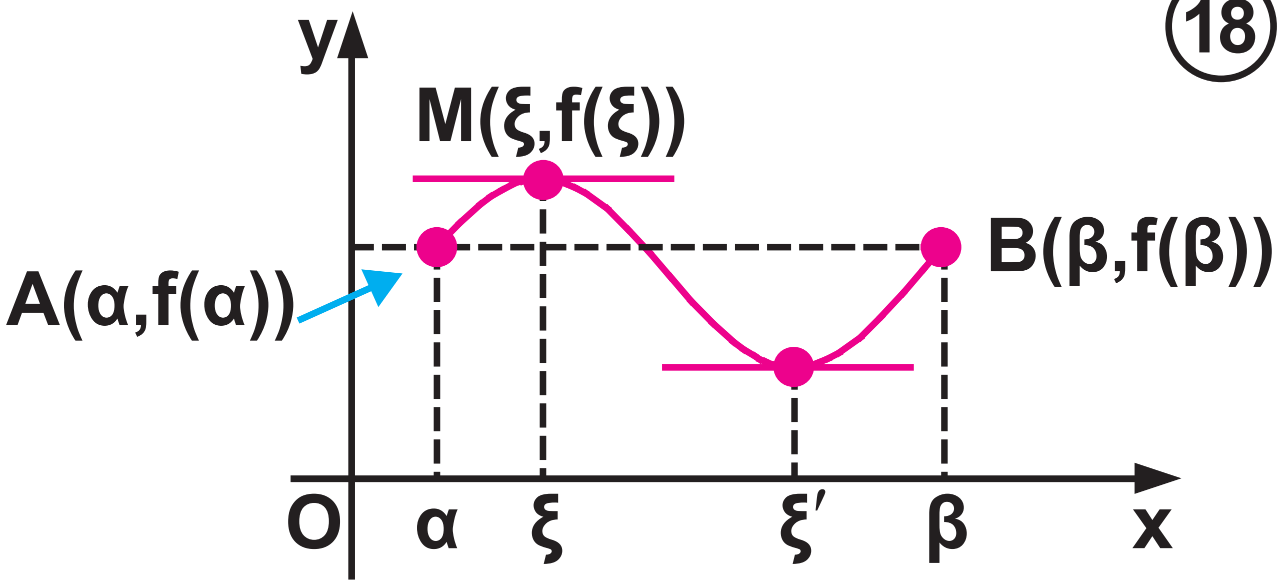
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

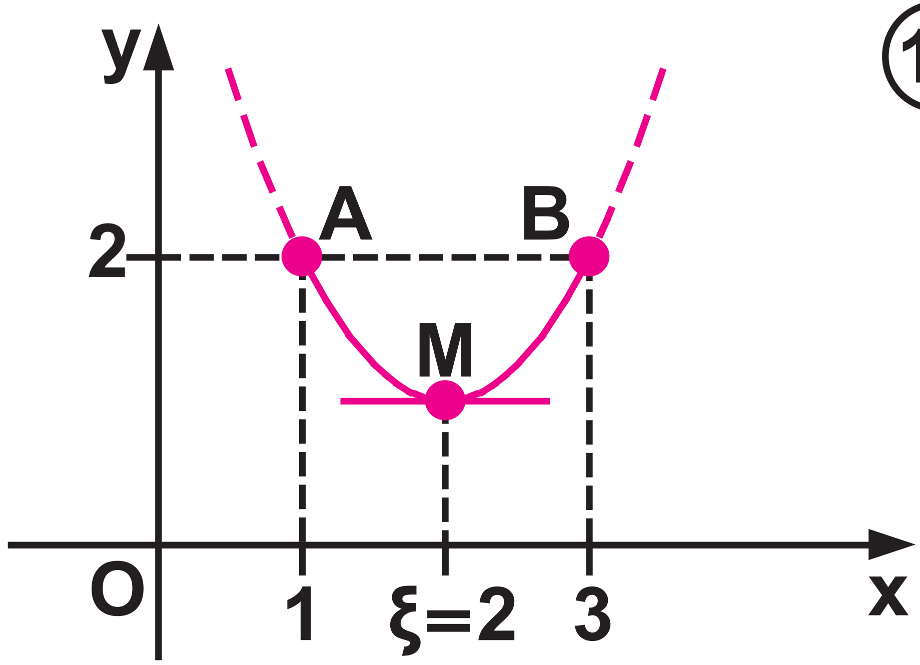
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

18



Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in [1,3]$. (Σχ. 19)

19



Επειδή η f είναι συνεχής στο [1,3], παραγωγίσιμη στο (1,3), με $f'(x) = 2x - 4$ και $f(1) = 2 = f(3)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (1,3)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Για την εύρεση του αριθμού ξ, έχουμε:

$$f'(\xi) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\xi - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \xi = 2.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

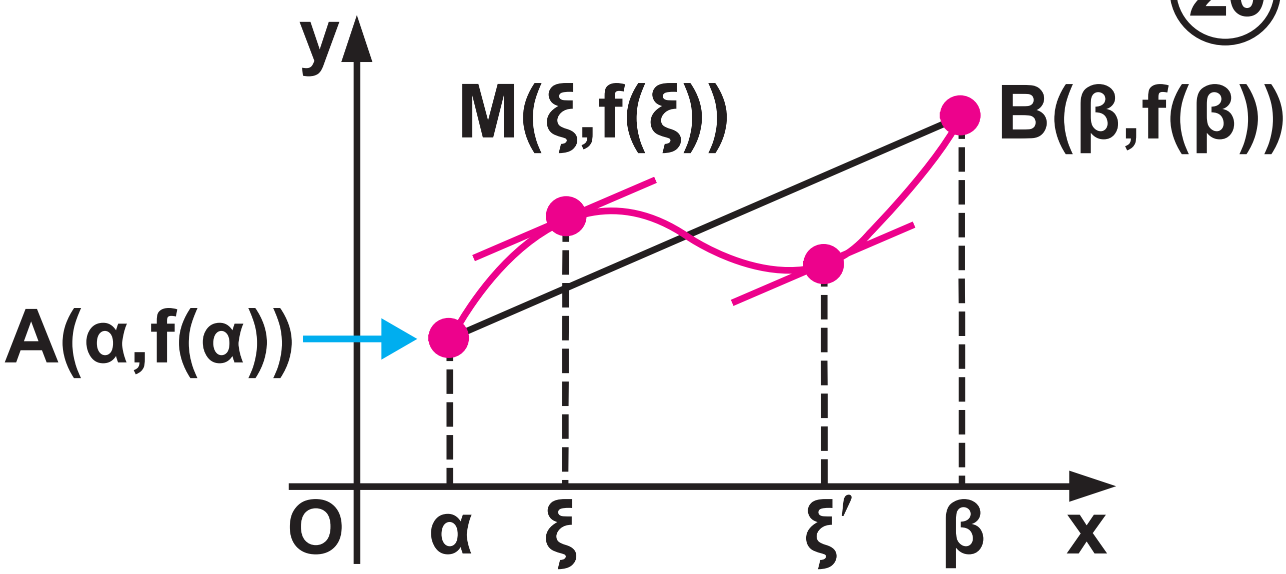
- **συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)**

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

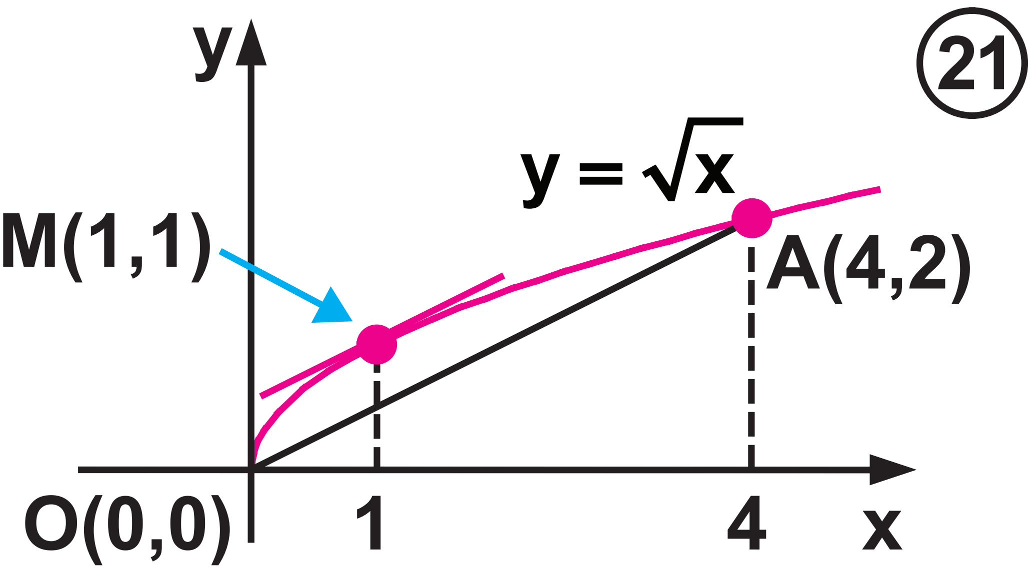
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M(ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη της ευθείας AB.

20



Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,4].$$



Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,4] και παραγωγίσιμη στο (0,4), με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, θα υπάρχει ένας αριθμός $\xi\in(0,4)$ τέτοιος, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{1}{2}.$$

Για την εύρεση του αριθμού ξ, έχουμε:

$$f'(\xi)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\xi}=1\Leftrightarrow\xi=1.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να αποδειχτεί ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\lambda x^3+x^2-(\lambda+1)x,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,1]$.

ii) Η εξίσωση $3\lambda x^2+2x-(\lambda+1)=0,\ \lambda\in\mathbb{R}^*$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [0,1] αφού

- είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f'(x) = 3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1)$ και
- ισχύει $f(0) = f(1) = 0$.

ii) Αφού, λοιπόν, για τη συνάρτηση $f(x) = \lambda x^3 + x^2 - (\lambda + 1)x$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, θα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $3\lambda\xi^2 + 2\xi - (\lambda + 1) = 0$. Επομένως, το $\xi \in (0,1)$ θα είναι ρίζα της εξίσωσης $3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1) = 0$.

2. **Να αποδειχτεί ότι για τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ και για οποιοδήποτε διάστημα $[x_1, x_2]$, ο αριθμός $x_0 \in (x_1, x_2)$, που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, είναι το κέντρο του διαστήματος $[x_1, x_2]$, δηλαδή είναι $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), με $f'(x) = 2\alpha x + \beta$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Είναι όμως:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=$$

$$=\frac{\alpha x_2^2+\beta x_2+\gamma-\alpha x_1^2-\beta x_1-\gamma}{x_2-x_1}=$$

$$=\frac{\alpha(x_2-x_1)(x_2+x_1)+\beta(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=$$

$$=\frac{(x_2-x_1)[\alpha(x_1+x_2)+\beta]}{x_2-x_1}=$$

$$=\alpha(x_1+x_2)+\beta.$$

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$2\alpha x_0+\beta=\alpha(x_1+x_2)+\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

3. **Ένα αυτοκίνητο διήνυσε μία διαδρομή 200 χιλιομέτρων σε 2,5 ώρες. Να αποδειχθεί ότι κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν 80 χιλιόμετρα την ώρα.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $x = S(t)$, $t \in [0, 2{,}5]$ η συνάρτηση θέσης του κινητού. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $t_0 \in [0, 2{,}5]$, τέτοια ώστε $\upsilon(t_0) = S'(t_0) = 80$.
Η συνάρτηση S είναι συνεχής στο [0, 2,5] και παραγωγίσιμη στο (0, 2,5). Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $t_0 \in (0, 2{,}5)$ τέτοιο, ώστε

$$\upsilon(t_0) = S'(t_0) = \frac{S(2{,}5) - S(0)}{2{,}5} =$$

$$= \frac{200-0}{2,5} = 80 \text{ χλμ. την ώρα.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

   i) $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad [0, 2]$

   ii) $f(x) = \eta\mu 3x, \quad \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

iii) $f(x) = 1 + συν2x, \quad [0, π]$

iv) $f(x) = |x|, \quad [-1, 1]$.

2. Να εξετάσετε, ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα τα $ξ \in (α, β)$ για τα οποία ισχύει $f'(ξ) = \dfrac{f(β) - f(α)}{β - α}$.

i) $f(x) = x^2 + 2x, \; [0, 4]$

ii) $f(x) = 3ημ2x, \quad \left[0, \dfrac{π}{2}\right]$

iii) $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & , \quad x\le -1 \\ x^3-x & , \quad x>-1 \end{cases}$,

$[-3, 2]$

3. Αν $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=\ln x$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και στη συνέχεια ότι:

$$e^{\alpha}<\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}<e^{\beta} \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}.$$

Για τη συνάρτηση $g(x)=\ln x$ υποθέτουμε επιπλέον ότι $0<\alpha<\beta$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

   i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$.

   ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)ημx$. Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

ii) Η εξίσωση $εφx=1-x$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

3. i) Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $ημ\frac{x}{2}=x$ αληθεύει μόνο για $x=0$.

4. i) Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| \le \dfrac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|\beta - \alpha|.$$

5. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [0, 4] και ισχύει $2 \le f'(x) \le 5$ για κάθε $x \in (0, 4)$. Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι $9 \le f(4) \le 21$.

6. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [–1,1] και

ισχύει $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$.

7. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 2^x \text{ και } g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα $A(0,1)$, $B(1,2)$.

2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού θεωρείται μία από τις σπουδαιότερες προτάσεις της ανάλυσης, αφού με τη βοήθειά του αποδεικνύονται πολλά άλλα θεωρήματα. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το Θ.Μ.Τ. για να αποδείξουμε τα επόμενα δύο βασικά θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και

• $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

• Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.

• Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=$ $=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια,

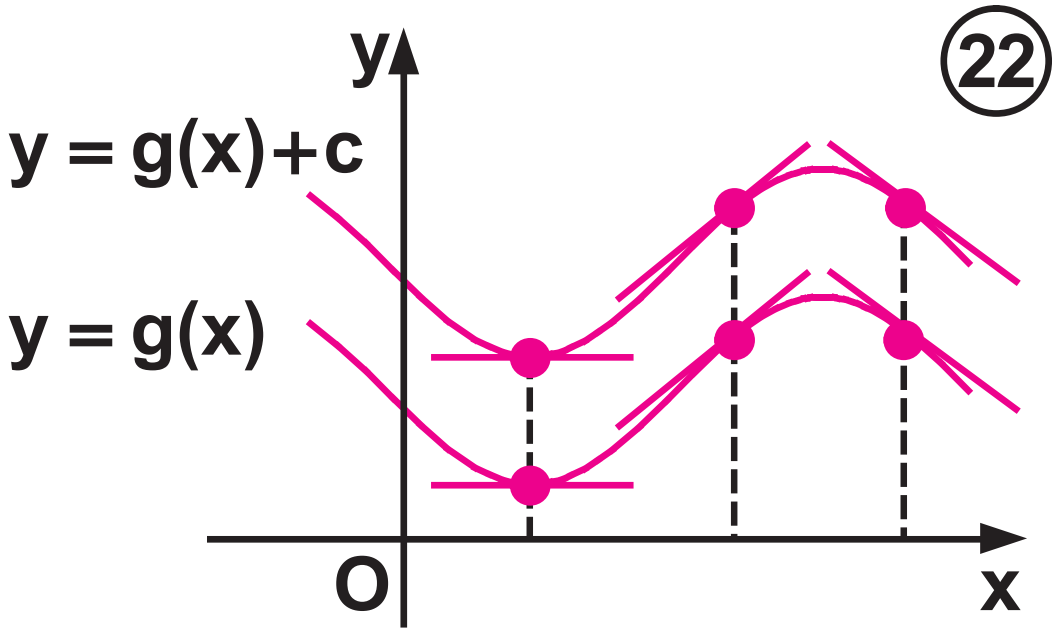
ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$



Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-1 & , \quad x<0 \\ 1 & , \quad x>0\end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x \in(-\infty, 0) \cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup(0,+\infty)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

i) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή και

ii) Να βρεθεί ο τύπος της f, αν δίνεται επιπλέον ότι $f(0) = 1$.

ΛΥΣΗ

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\varphi'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} \overset{(1)}{=} 0,$$

Επομένως, η φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) Επειδή η φ είναι σταθερή, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα, $\frac{f(x)}{e^x} = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως

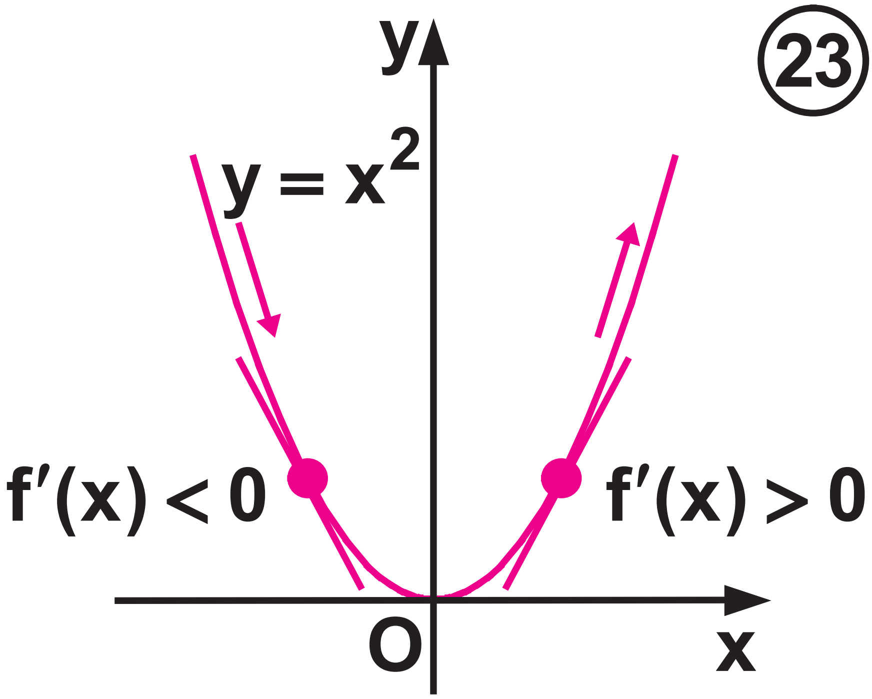
$$f(x) = ce^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(0) = 1$, έχουμε $1 = c$, οπότε

$$f(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονοτονία συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(-\infty, 0)$, στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $f'(x) = 2x < 0$, ενώ στο διάστημα $(0, +\infty)$, στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) = 2x > 0$.



Βλέπουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στη μονοτονία και στο πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης. Συγκεκριμένα ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

• Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

• Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

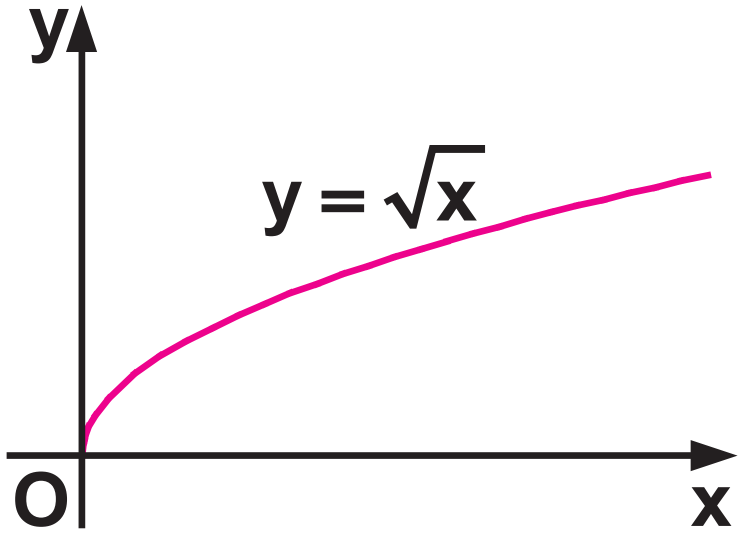
• Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

Για παράδειγμα:

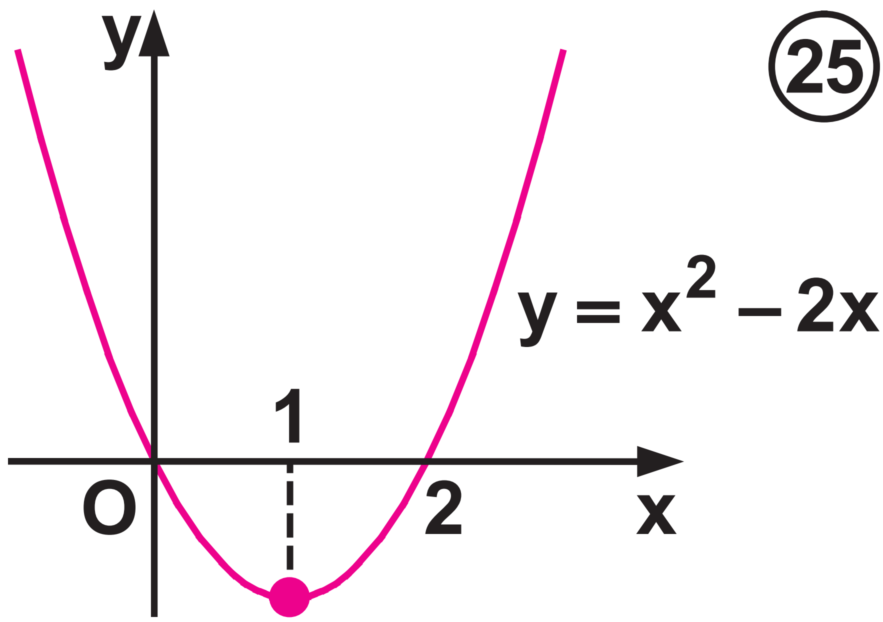
— η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και ισχύει

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

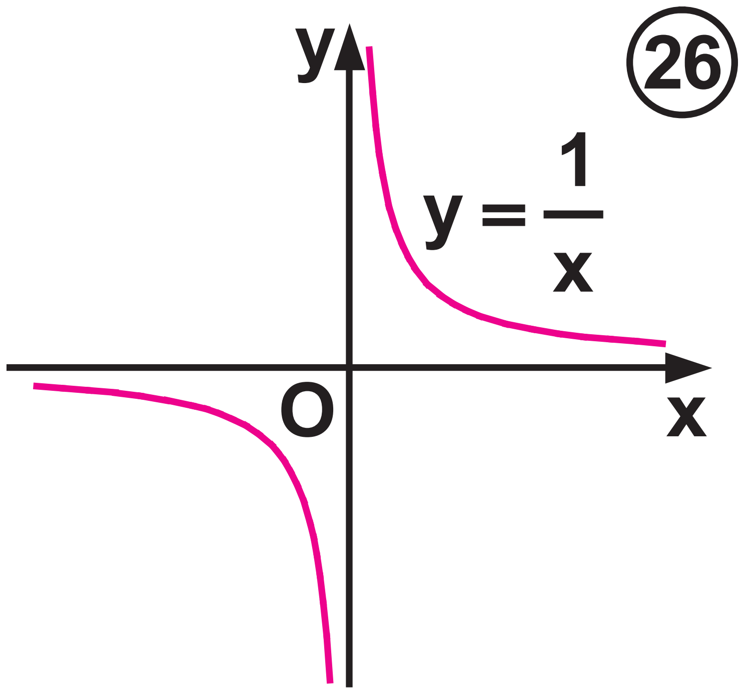
24



— η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $f'(x) = 2(x-1) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$ και $f'(x) = 2(x-1) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

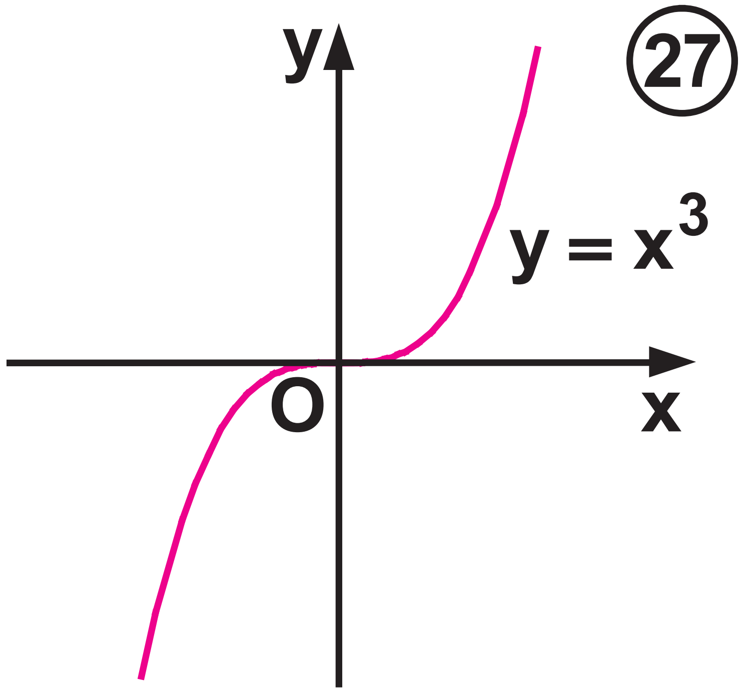


— η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, αφού $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$.



ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$. Το πρόσημο της f' δίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

Επομένως, η συνάρτηση f:

— είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ και ισχύει $f'(x)>0$ στο $(-\infty,0)$.

— είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $f'(x)<0$ στο $(0,1)$.

— είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$.
Το πρόσημο της f' και το είδος

μονοτονίας της f στα διαστήματα $(-\infty, 0], [0, 1]$ και $[1, +\infty)$ συγκεντρώνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

2. i) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f'(x) = x - \sigma\upsilon\nu x - 2,\ x \in [0, \pi]$ είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = x - 2$ έχει ακριβώς μια λύση στο $[0, \pi]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Είναι

$$f'(x) = (x - συνx - 2)' = 1 + ημx > 0,$$
για κάθε $[0, π]$.

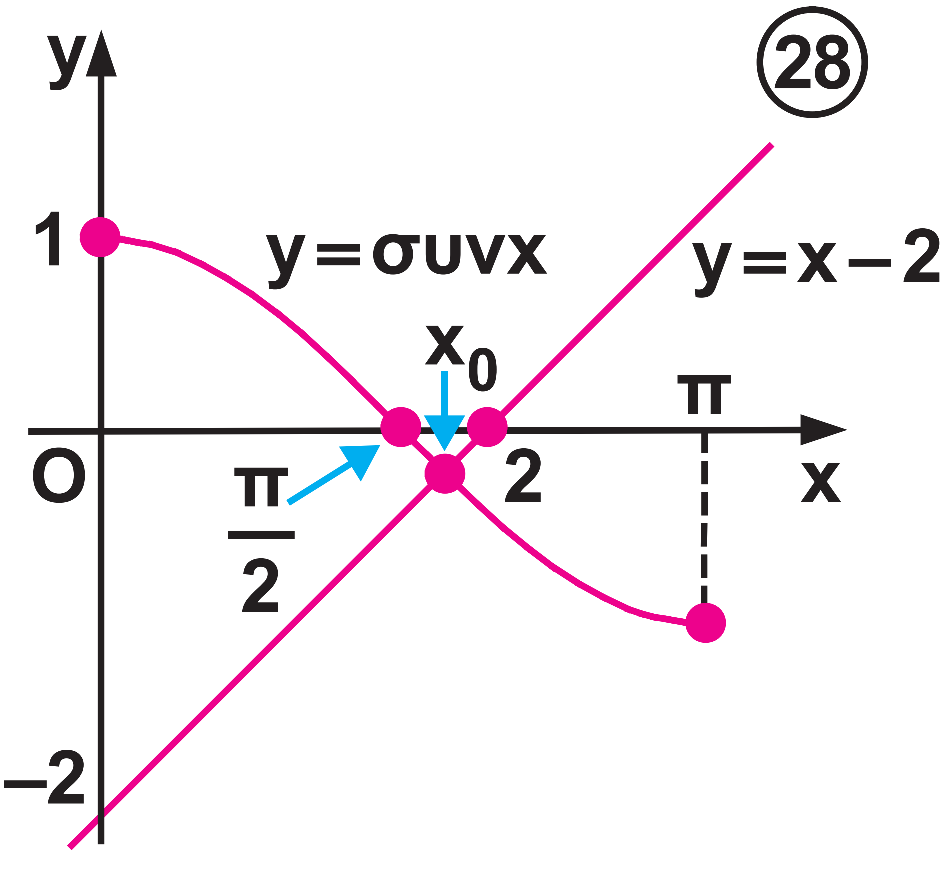
Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, π]$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, σύμφωνα με την παράγραφο 1.8, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(0), f(π)] = [-3, π - 1]$.

ii) Έχουμε:

$$συνx = x - 2 \Leftrightarrow x - συνx - 2 = 0,$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0,\ x \in [0, π].$$

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-3, π-1]$, που περιέχει το 0, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$, η x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό. Η ρίζα αυτή, όπως φαίνεται και στο σχήμα 28, είναι η τετμημένη του σημείου τομής της $y = x - 2$ και της $y = συνx$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν:

   $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

   να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2$ είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

   i) $f(x) = x^3 + 3x - 4$

   ii) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

iii) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

3. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & , \quad x \leq 1 \\ x + 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$

ii) $f(x) = |x^2 - 1|$

4. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ ii) $f(x) = \ln x - x$

iii) $f(x) = ημx + |ημx|, \; x \in [0, 2π]$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = x^5 + 5x - 6$ και

$g(x) = 2\sqrt{x} + x - 3$.

i) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

iii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$x^5 + 5x - 6 = 0 \text{ και } 2\sqrt{x} + x - 3 = 0$$

έχουν ακριβώς μία ρίζα την $x = 1$.

6. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x+1)$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ' όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει

   $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$,

   να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

2. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1,1]$.

iii) Αν $-2 < \alpha < 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1,1)$.

3. Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση:

$$x = S(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 16t + 160,\ 0 \leq t \leq 5.$$

Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

i) Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν;

ii) Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά;

iii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται;

4. Η τιμή V (σε ευρώ) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την παραγωγή του, δίνεται από τον τύπο

$$V = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2}.$$

Να αποδείξετε ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται χωρίς, όμως, η τιμή του να μπορεί να γίνει μικρότερη από το μισό της αρχικής τιμής του.

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-9x}{x^2-1}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

ii) Η εξίσωση $x^3-\alpha x^2-9x+\alpha=$ $=0$ είναι ισοδύναμη με την

$f(x) = \alpha$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

7. Να αποδείξετε οτι:

   i) Η συνάρτηση $f(x) = ημx -$ $- xσυνx$ είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   ii) $ημx - xσυνx > 0$, για κάθε

$x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

iii) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{ημx}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

8. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = 2ημx + εφx - 3x$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) $2ημx + εφx \geq 3x$, για κάθε $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β΄ ΜΕΡΟΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο:

Διαφορικός Λογισμός